I DAG: KOMPENDIET 3.3-3.4 OG 4.1-4.2
BRØKTALL i β-system og tall på datamaskinen

BRØKTALL

GENERELT: $0.d_{-1}d_{-2}d_{-3}\ldots_\beta = d_{-1}\times\beta^{-1} + d_{-2}\times\beta^{-2} + d_{-3}\times\beta^{-3}\ldots$

Hvor $d_i = 0, \ldots, \beta-1$

Et slikt tall ligger i $[0,1]$

Hvordan kan vi finne en slik representasjon?

Eks: Finn repr. for $1/5$ med $\beta = 8$

Må finne $d_{-1}, d_{-2}, d_{-3}, \ldots$ s.a.

$$1/5 = d_{-1}8^{-1} + d_{-2}8^{-2} + d_{-3}8^{-3}\ldots$$

Ganger med 8 på begge sider, får

$$1 + 3/5 = 8/5 = d_{-1} + \underbrace{d_{-2}8^{-1} + d_{-3}8^{-2}\ldots}_{\text{BRØKDEL i } [0,1]}$$

$\Rightarrow d_{-1} = 1$

Neste steg: trekk fra $d_{-1} = 1$ på begge sider

Ny ligning $3/5 = d_{-2}8^{-1} + d_{-3}8^{-2} + d_{-4}8^{-3}\ldots$

Ganger med 8: $4 + 4/5 = 24/5 = d_{-2} + \underbrace{d_{-3}8^{-1} + d_{-4}8^{-2}\ldots}_{\text{BRØKDEL}}$

$\Rightarrow d_{-2} = 4$!

Trekker fra d_{-2} $\Rightarrow$

$$4/5 = d_{-3}8^{-1} + d_{-4}8^{-2} + d_{-5}8^{-3}\ldots$$

$\times 8$: $6 + \frac{2}{5} = 32/5 = d_{-3} + d_{-4}8^{-1} + d_{-5}8^{-2}\ldots$

$\Rightarrow d_{-3} = 6$

$$\frac{2}{5} = d_{-4}8^{-1} + d_{-5}8^{-2} + d_{-6}8^{-3}\ldots$$

$$3 + \frac{1}{5} = \frac{16}{5} = d_{-4} + d_{-5}8^{-1} + d_{-6}8^{-2}\ldots$$

$\Rightarrow d_{-4} = 3$

Ny brøkdel: $\frac{1}{5} = d_{-5}8^{-1} + d_{-6}8^{-2} + d_{-7}8^{-3}\ldots$

Har sett dette før, får gjentatte siffere

$$1/5 = 0.\underbrace{1463}\underbrace{1463}\underbrace{1463}\underbrace{1463}\ldots_8$$

uendelig rekke

Thm 3.15. Ethvert tall i $(0,1)$ kan skrives - β-system med $\beta > 1$, $\beta \in \mathbb{N}$, entydig hvis vi ikke tillater uendelig mange $\beta - 1$ til slutt

$0{,}9999\ldots = 1$

Eks

BROK	HEL	
1/5	1	8/5
3/5	4	24/5
4/5	6	32/5
2/5	3	16/5
1/5	1	8/5
3/5	4	24/5
4/5		

Formell algoritme

Algoritme 3.16. La a være et brøktall i $(0,1)$
Dette kan representeres i β-tallsystem
med k-siffer $d_{-1}d_{-2}\cdots d_{-k\,\beta}$ ved
$a_{-1} = a$
for $i = -1, -2, \cdots, -k$
$d_i = \lfloor a_i * \beta \rfloor$ (Heltallsdel $a * \beta$)
$a_{i-1} = a_i * \beta - d_i$ (Brøkdel $a * \beta$)

$\lfloor x \rfloor$ kalles „floor" og angir heltallsdelen av x

Eks

$\lfloor 1.3 \rfloor = 1$ $\lfloor 3.1415\cdots \rfloor = 3$

$\lfloor 3.1 \rfloor = 3$

Lemma 3,21. La $a \in (0,1)$. Da er a et rasjonalt tall $a = \frac{b}{c}$ hvis og bare hvis sifferne til a i β-system gjentar seg i sykler

Lemma 3,22: $a \in (0,1)$ vil ha et endelig antall siffer $\neq 0$ i grunntallet β hvis og bare hvis $a = \frac{b}{c}$ er rasjonal og alle primtallsfaktorene i c er faktorer i β

Eks

$$1/5 = 0.2_{10},$$
$$1/3 = 0.3333\cdots_{10}$$
$$1/3 = 0.2_6$$
$$1/10 = 0.1_{10} = 0.00011001100\cdots_2$$
$$1/8 = \frac{125}{1000} = 0.125_{10}$$

3.4 ARITMETIKK I B-SYSTEMET

Eks: ADDISJON I 8-tallsystem

$$\begin{array}{r} {}^{1\,1\,1}\\ 457_8 \\ +\ 325_8 \\ \hline 1004_8 \end{array}$$

SUBTRAKSJON: HUSK AT VI LÅNER 8!

MULTIPLIKASJON: $2 \cdot 3 = 6 = 12_4$

KAP 4: REPRESENTASJON AV REELLE TALL PÅ DATAMASKIN

HELTALL, 4.1

SEKVENS PÅ 8 SIFFER I 2-TALLSSYSTEM KALLES „BYTE"

EKS $10000001 = 129_{10}$

32 BITS TALL, DVS 4 BYTES

BRUKER 1 SIFFER (BIT) TIL FORTEGN

31 — 1 — TIL TALLVERDI

$\Rightarrow$ kan representere tall $-2^{31}, \dots 2^{31}-1$

64 BITS TALL, 8 BYTES,

$\Rightarrow$ kan representere $-2^{63}, \dots, 2^{63}-1 \approx 9 \times 10^{18}$

4.2 REELLE TALL

Normalform (desimaltall): $a = b \cdot 10^n$ der $\frac{1}{10} \leq |b| < 1$

Eks $\pi \approx 0.31415 \cdot 10^1$

$1/7 \approx 0.1429 \cdot 10^0$

$\frac{10\,600\,000}{23} \approx 0.4348 \cdot 10^7$

Normalform binærtall

$a = b \cdot 2^n$ der $\frac{1}{2} \leq |b| < 1$

Flyt-tall IEEE 754 STANDARD 32 BITS

$a = b \cdot 10^n$ der

b er på binær normalform med 23 bits inklusive fortegn

n er 8-bits heltall med fortegn

Kan representere tall med tallverdi

$1.4 \cdot 10^{-45}$ til $3.4 \cdot 10^{38}$