Kalkulus 10.2.10

y er klormengde i liter.

$y' = (\text{liter inn}) - (\text{liter ut})$

deler på 100 siden klorprosenten er 0.001

Inn kommer $\frac{0.001}{100} \cdot 50000 = \frac{1}{2}$ liter klor.

Ut går 50 000 liter med klorandel $\frac{y}{1000000}$, så det er $50000 \cdot \frac{y}{1\,000\,000} = \frac{1}{20}$ liter klor.

Da får vi

$$y' = \frac{1}{2} - \frac{1}{20}y \quad , \text{eller} \quad \underline{y' + \frac{1}{20}y = \frac{1}{2}}.$$

Her er integrerende faktor $e^{\frac{1}{20}t}$, så vi får

$$\left(e^{\frac{1}{20}t}y\right)' = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{20}t}$$

Integrerer begge sider (og slår sammen integrasjonskonstanter):

$$e^{\frac{1}{20}t}y = 10e^{\frac{1}{20}t} + C$$

Så

$$y(t) = 10 + Ce^{-\frac{1}{20}t} = 10 + Ce^{-0.05t}.$$

Til å begynne med er det $\frac{0.004}{100} \cdot 1000\,000 = 40$ liter klor, så $y(0) = 40$:

$$40 = y(0) = 10 + C \quad \Rightarrow \quad C = 30.$$

Løsningen på likningen med initialbetingelsen er da

$$y(t) = 10 + 30e^{-0.05t}.$$

Klorprosent 0.003% svarer til 30 liter klor, så vi vil løse

$$10 + 30e^{-0.05t} = 30 \Rightarrow e^{-0.05t} = \frac{2}{3} \Rightarrow -0.05t = \ln\frac{2}{3}$$

Så $y(t) = 30$ når $t = -20\ln\frac{2}{3} \approx \underline{\underline{8.109}}$. Det tar litt over 8 dager.