1.4.8

Binomialformelen:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

a) Bruk binomialformelen til å vise at $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

Observer at $2=1+1$ og se at

$$2^n = (1+1)^n \underset{\text{B.F.}}{=} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} 1^{n-i} 1^i = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}. \quad \square$$

b) Får vite:

- Antall mulige delmengder av $n$ ting er $2^n$.
- En delmengde av $k$ ting kan plukkes ut på $\binom{n}{k}$ forskjellige måter.

$2^n$ = antall mulige delmengder

= (antall delm. med 0 elem) + (antall m/ 1 elem) + (... m/ 2 elem) + ... + (... m/ n elem)

$$= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$$

2.1.8 Vis at $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ for alle reelle tall $x, y$ der $y \neq 0$.

Sjekker muligheter:

$x \geq 0, y > 0$: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{x}{y}$ $\quad \frac{|x|}{|y|} = \frac{x}{y}$, OK.

$x < 0, y > 0$: $\left|\frac{x}{y}\right| = -\frac{x}{y}$ $\quad \frac{|x|}{|y|} = \frac{-x}{y} = -\frac{x}{y}$ OK.

$x \geq 0, y < 0$: $\left|\frac{x}{y}\right| = -\frac{x}{y}$ $\quad \frac{|x|}{|y|} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}$ OK.

$x < 0, y < 0$: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{x}{y}$ $\quad \frac{|x|}{|y|} = \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}$ OK.

Vi har vist resultatet.

2.1.9 Vis at for alle tall $x, y, z$ er $|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$.

Vi vil bruke trekantulikheten: $|a+b| \leq |a| + |b|$

$$|x-y| = |x - \underset{0 = z-z}{0} - y| = |(x-z) + (z-y)| \leq |x-z| + |z-y|.$$

2.1.10 Vis ved induksjon på $n$ at

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| \qquad (*)$$

for alle reelle tall $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Påstand $P_n$: $(*)$ holder.

$P_1$: $|a_1| \leq |a_1|$. OK

$P_2$: $|a_1 + a_2| \leq |a_1| + |a_2|$. OK. 2.1.1 i boka.

Anta at $P_k$ holder: $|a_1 + a_2 + \dots + a_k| \leq |a_1| + |a_2| + \dots + |a_k|$.

Vil vise $P_{k+1}$:

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_{k+1}| = |(a_1 + a_2 + \dots + a_k) + a_{k+1}|$$

$$\overset{2.1.1}{\leq} |a_1 + \dots + a_k| + |a_{k+1}|$$

$$\overset{P_k}{\leq} |a_1| + |a_2| + \dots + |a_k| + |a_{k+1}|$$

$P_{k+1}$ følger!

Induksjon OK.

2.2.5

a) Summen av to irrasjonale tall er irrasjonal.

**Nei:** $\sqrt{2}$ irrasj., $-\sqrt{2}$ irrasj., men $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$, som er rasjonal.

b) Hvis $a$ er irrasjonal er $-a$ det også.

**Ja:** Hvis ikke, anta $-a=\frac{x}{y}$ der $x,y$ heltall.

Men da er $a=\frac{(-x)}{y}$, og $-x$ er et heltall, så $a$ rasjonal.

c) Hvis $a^2$ er rasjonal er $a$ det også.

**Nei:** $(\sqrt{2})^2=2$ er rasjonal, men $\sqrt{2}$ er irrasjonal.

d) Hvis $a^2$ er irrasjonal er $a$ det også.

**Ja:** Hvis ikke, anta $a=\frac{x}{y}$ der $x,y$ heltall.

Men da er $a^2=\frac{x^2}{y^2}$, og $x^2, y^2$ er heltall.

e) Hvis $a\neq 0$ er irrasjonal er $\frac{1}{a}$ det også.

**Ja:** 1 er rasjonal, så ved korollar 2.2.2 er $\frac{1}{a}$ irrasjonal.

2.2.8 Aritmetikkens fundamentalteorem:

Ethvert naturlig tall $a > 1$ kan skrives som et produkt av primtall:

$$a = p_1 p_2 \cdots p_n.$$

Faktoriseringen er entydig i den forstand at om

$$a = q_1 q_2 \cdots q_m$$

er en annen, er $m = n$ og $p_i$-ene og $q_i$-ene er de samme opp til rekkefølge.

---

Anta for motsigelse at $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$ der $a, b$ er naturlige tall med primtallsfaktoriseringer $a = p_1 p_2 \cdots p_n$, $b = q_1 q_2 \cdots q_m$.

a) $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$, så om vi kvadrerer er $2 = \frac{a^2}{b^2}$.

Da er $2b^2 = a^2$, og vi setter inn:

$$2(q_1 q_2 \cdots q_m)^2 = (p_1 p_2 \cdots p_n)^2$$

$$2 q_1 q_1 q_2 q_2 \cdots q_m q_m = p_1 p_1 p_2 p_2 \cdots p_n p_n$$

b) Av $q_i$-ene er kanskje noen lik 2. Anta at $r$ av dem er det. Anta $s$ av $p_i$-ene er lik 2.

På venstre side i

$$2 q_1 q_1 \cdots q_m q_m = p_1 p_1 \cdots p_n p_n$$

er det da $2r+1$ toere. På høyre side er det $2s$ toere.

c) La $k = 2 q_1 q_1 \cdots q_m q_m$. Da har vi funnet to primtallsfaktoriseringer av $k$, men i den ene har vi $2r+1$ toere, og i den andre har vi $2s$ toere. Det strider mot aritmetikkens fundamentalteorem.

Dermed er $\sqrt{2}$ irrasjonal.

2.2.9 Vis at $\sqrt{n}$ er irrasjonal om $n$ ikke er et kvadrattall.

Vi antar $\sqrt{n} = \frac{a}{b}$ der $a = p_1 p_2 \cdots p_n$, og $b = q_1 q_2 \cdots q_m$.

Kvadrerer: $n = \frac{a^2}{b^2}$, så $n b^2 = a^2$.

Da ser vi at $n\, q_1 q_1 q_2 q_2 \cdots q_m q_m = p_1 p_1 p_2 p_2 \cdots p_n p_n$.

La $n = r_1 r_2 \cdots r_k$ være en primtallsfaktorisering.

Da er $r_1 r_2 \cdots r_k\, q_1 q_1 q_2 q_2 \cdots q_m q_m = p_1 p_1 p_2 p_2 \cdots p_n p_n$.

Se på $r_i$: Dette er et primtall, og vi kan anta det opptrer $s$ ganger blant $r_i$-ene. Det finnes $t$ ganger blant $q_i$-ene, og $u$ ganger blant $p$-ene. På venstre side er det da $s+2t$ ganger. På høyre side er det $2u$ ganger.

$s+2t = 2u$ er bare mulig hvis $s$ er et partall.

Hvis det er en $r_i$ slik at $s+2t \neq 2u$ over har vi en selvmotsigelse, slik som i forrige oppgave.
Forskjellig fra

Hvis ikke har alle primtallsfaktorene $r_1, r_2, \ldots r_k$ i $n$ partalls-multiplisitet. Men da er $n$ et kvadrattall!

Vi har vist at $\sqrt{n}$ er irrasjonal om $n$ ikke er et kvadrattall.

2.3.5 a) „$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$"

**JA:** $\max(\sup A, \sup B)$ må være øvre skranke for $A \cup B$.

På den andre siden er $\sup(A \cup B) \geq \sup A$, $\sup(A \cup B) \geq \sup B$

Det vil si at

$$\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B) \leq \max(\sup A, \sup B)$$

Så $\max(\sup A, \sup) = \sup(A \cup B)$.

b) „$\sup(A \cap B) = \min(\sup A, \sup B)$"

**Nei:** La $A = \{0, 2, 3\}$ og $B = \{0, 1\}$. $A \cap B = \{0\}$.

Så $\sup A = 3$, $\sup B = 1$, $\sup(A \cap B) = 0$.

c) „$\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$".

Som i a) er $\inf(A \cup B) \leq \min(\inf A, \inf B)$.

Men $\min(\inf A, \inf B)$ er en nedre skranke for $A \cup B$, så

$$\inf(A \cup B) \leq \min(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cup B)$$

og resultatet følger.

d) „$\inf(A \cap B) = \max(\inf A, \inf B)$"

**NEI:** $A = \{0, 1, 3\}$ $B = \{2, 3\}$ $A \cap B = \{3\}$,

$\inf(A \cap B) = 3$, $\inf(A) = 0$, $\inf(B) = 2$.