3.2.2

hvis $a = d_n \beta^n + d_{n-1}\beta^{n-1} + \cdots + d_1 \beta^1 + d_0$.

da er $d_0 = a \% \beta$.

Og er $a // \beta = d_n \beta^{n-1} + \cdots + d_2 \beta + d_1$,

og vi kan gjenta.

a) 40 til 4-tallsystemet.

$$
\begin{array}{c|c}
 & (\xrightarrow{\%}) \\
40 & 0 \\
10 & 2 \\
2 & 2 \\
0 &
\end{array}
$$

$40 = 10 \cdot 4 + 0$

$10 = 2 \cdot 4 + 2$

$2 = 0 \cdot 4 + 2$

Vi ser at $40_{10} = 220_4$.

$220_4 = 2 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^1 + 0 = 40$

b) 17 i 5-tallssystemet:

$$
\begin{array}{c|c}
17 & 2 \\
3 & 3 \\
0 &
\end{array}
$$

$17_{10} = 32_5$.

3.2.5 a) Skriv 1001101_2 i 16-tallssystemet.

Binære tall konverteres til heksadesimale tall 4 sifre av gangen (obs 3.11).

$$\underbrace{0100}_{4_{16}}\ \underbrace{1101_2}_{d_{16}} = 4d_{16}.$$

3.2.6 f) $0.f01_{16}$ til binære.

$f_{16} = 1111_2$

$0_{16} = 0000_2$

$1_{16} = 0001_2$

Så $0.f01_{16} = 0.111100000001_2$

3.2.7

7 til $\beta = 7$: $\begin{array}{c|c} 7 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & \end{array}$ $7_{10} = 10_7$

37 til $\beta = 37$: $\begin{array}{c|c} 37 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & \end{array}$ $37_{10} = 10_{37}$

På samme måte er $4_{10} = 10_4$.

b) La $a \in \mathbb{N}$. Da er

$$10_a = 1 \cdot a^1 + 0 = a.$$

3.3.1

a) „$10_{10} > 10_9$"?

Ja: $10_9 = 9_{10}$.

b) „0.1_β større når $\beta=10$ enn når $\beta=9$"

Nei: $0.1_\beta = \beta^{-1} = \frac{1}{\beta}$.

c) „Uavhengig av β er 17_β et primtall"

Nei: La $\beta=13$ er $17_\beta = 1\cdot 13+7=20$.

d) „$\frac{\ln\sqrt{e}^\pi}{\pi}$ er rasjonal"

Ja: $\frac{\ln\sqrt{e}^\pi}{\pi} = \frac{\cancel{\pi}\cdot\ln\sqrt{e}}{\cancel{\pi}} = \ln e^{1/2} = \frac{1}{2}\ln e = \frac{1}{2}$.

3.3.2 For hvilken β kan $\frac{2}{3}$ representeres med et endelig antall siffer?
$\beta = 2$, $\beta = 4$, $\beta = 10$ eller $\beta = 6$

Lemma 3.22:
$\frac{b}{c}$ har endelig rep. i β-tallsystemet om alle primtallsfaktorene til c deler β.

Vi ser at i $\frac{2}{3}$ er primfaktoren 3.
Dermed er svaret $\beta = 6$.

3.3.3 a) $\frac{1}{4}$ med $\beta=2$:

$$\begin{array}{c|cc}
\frac{1}{4} & 0 & \left(\frac{2}{4}\right) \\
\frac{2}{4} & 1 & (1) \\
0 & &
\end{array}$$

$\frac{1}{4}$ blir 0.01_2

b) $\frac{3}{7}$ til 3-tallssystemet.

$$\begin{array}{c|cc}
\frac{3}{7} & 1 & \left(\frac{9}{7}\right) \\
\frac{2}{7} & 0 & \left(\frac{6}{7}\right) \\
\frac{6}{7} & 2 & \left(\frac{18}{7}\right) \\
\frac{4}{7} & 1 & \left(\frac{12}{7}\right) \\
\frac{5}{7} & 2 & \left(\frac{15}{7}\right) \\
\frac{1}{7} & 0 & \left(\frac{3}{7}\right) \\
\frac{3}{7} & &
\end{array}$$

$\frac{3}{7}$ i 3-tallssystemet: $0.\overline{102120}\ldots_3$

3.3.6 Hvis $a = \frac{b}{c}$, hva er den maksimale lengden til den repeterende sekvensen?

I algoritme 3.20 gis sifrene ved

for $i = -1, -2, \ldots$
$$d_i = (b * \beta) // c$$
$$b = (b * \beta) \% c$$

Vi ser at b må være ett av $0, 1, 2, \ldots, c-1$ i alle iterasjoner. Videre, om b blir 0 er vi ferdige.

Hvis b får en verdi den har hatt før gjentar sifrene seg.

Det er da i alt $c-1$ mulige verdier b kan få underveis i en repeterende sekvens (konkret $1, 2, \ldots, c-1$).

Maksimal lengde på repeterende sekvens er $c-1$.

3.3.7 Vis at om sifrene i et fraksjonalt tall a (i β-tallssystemet skrevet) gjentar seg er a et rasjonalt tall.

$a = d_{-1}\beta^{-1} + d_{-2}\beta^{-2} + d_{-3}\beta^{-3} + \cdots$

Antar den repeterende sekvensen har lengde s. Vi kan da skrive

$a = b + b_0 + b_1 + b_2 + \cdots$

der b er den ikke-gjentagende delen og hver b_i er én repetisjon.

$0.01232\,232\,232\cdots$

$b = 0.01$

$b_0 = 0.00232000\cdots$

$b_1 = 0.00000232\cdots$

osv.

Viser at $b_i = \beta^{-is} b_0$. Da ser vi at

$$a = b + \underbrace{b_0 + \beta^{-s} b_0 + \beta^{-2s} b_0 + \beta^{-3s} b_0 + \cdots}_{\text{geometrisk rekke!}}$$

Da er

$$a = b + \frac{b_0}{1-\beta^{-s}} = b + \frac{b_0\beta^s}{\beta^s - 1},$$ og dette er et rasjonalt tall.

3.3.8 Vis at et fraksjonalt tall i β-tallssystemet med et endelig antall sifre er et rasjonalt tall.

Som i forrige oppgave er

$$a = d_{-1}\beta^{-1} + d_{-2}\beta^{-2} + \cdots + d_{-k}\beta^{-k}$$

for en eller annen k.

$$a = \frac{d_{-1}\beta^{k-1} + d_{-2}\beta^{k-2} + \cdots + d_{-k}}{\beta^{k}}$$

ved å gange med β^k over og under.

Dette er et rasjonalt tall.

3.4.2 a) $3_7 + 1_7 = 4_7$.

c) $110_2 + 1011_2$.

$$\begin{array}{r} {}^{1}\ {}^{1}\ {}^{1} \\ 110_2 \\ +\ 1011_2 \\ \hline =10001_2 \\ \hline\hline \end{array}$$

Eksempel:

$312_4 \cdot 12_4$. Gangetabell i 4-tallssystemet.

	1	2	3
1	1	2	3
2	2	10	12
3	3	12	21

$$
\begin{array}{r}
\overset{}{3}\overset{1}{1}2 \cdot 12 \\
\hline
1230 \\
312 \\
\hline
=11010 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

3.4.4 Gangetabellen i 2-tallssystemet:

	0	1
0	0	0
1	0	1

a)

$$
\begin{array}{r}
110 \cdot 10 \\
\hline
000 \\
110 \\
\hline
=1100 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

b)

$$
\begin{array}{r}
110 \cdot 11 \\
\hline
110 \\
110 \\
\hline
=10010 \\
\hline\hline
\end{array}
$$

4.1.2 Vi bruker toerkomplement med 4 bits

I toerkomplement med n bits:

- Et ikkenegativt heltall representeres med sine bits.
- Et negativt tall x representeres ved bit-verdiene til tallet

$$2^n - |x|.$$

For 4 bits:

$7 \leftrightarrow 0111$	$-1 \leftrightarrow 1111$
$6 \leftrightarrow 0110$	$-2 \leftrightarrow 1110$
$5 \leftrightarrow 0101$	$-3 \leftrightarrow 1101$
$\vdots$	$\vdots$
$0 \leftrightarrow 0000$	$-8 \leftrightarrow 1000$

a) $-3+3$:

$$\begin{array}{r} {}^{111}\;\; \\ 1101 \quad \leftarrow -3 \\ +\ 0011 \quad \leftarrow 3 \\ \hline =10000 \\ \hline \end{array}$$

Vi har bare 4 bits, så vi kaster en.
1101+0011 gir 0000, så $-3+3=0$.

b) $7+1$:

$$\begin{array}{r} 0111 \\ +\ 0001 \\ \hline =1000 \\ \hline \end{array}$$

$7+1$ "=" -8

c) $-8-1$: $1000-0001=0111$

$-8-1$ "=" 7.