MIDTVEIS

4: Skriv $\frac{9}{20}$ i 2-tallssystemet.

$\frac{9}{20}$	0	$\left(\frac{18}{20}\right)$
$\frac{18}{20}$	1	$\left(\frac{36}{20}\right)$
$\frac{16}{20}$	1	$\left(\frac{32}{20}\right)$
$\frac{12}{20}$	1	$\left(\frac{24}{20}\right)$
$\frac{4}{20}$	0	$\left(\frac{8}{20}\right)$
$\frac{8}{20}$	0	$\left(\frac{16}{20}\right)$
$\frac{16}{20}$		

$$\left(\frac{9}{20}\right)_{10} = 0.01\overline{1100}\ldots_2$$

$0.0111\ 0011\ 0011_2\ldots$

der 0011 er rep. sek.

7: „Hva er" $\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$?

$$\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\frac{(1+\sqrt{2})}{1+\sqrt{2}} = \sqrt{2}\text{, irrasjonal.}$$

9: For hvilken β er $3_\beta \cdot 3_\beta = 12_\beta$

$3 \cdot 3$ er 9, og $12_\beta = \beta + 2$

For likhet må $\beta + 2 = 9 \Rightarrow \beta = 7$.

11: En tekst som inneholder 3 tegn er lagret med 9 bytes, hvilken en koding er den da lagret med?

- ASCII og ISO-Latin 1 bruker 1 byte per tegn
- UTF-16 og UTF-32 bruker et partall antall per tegn

Teksten er lagret med UTF-8.

13: Hvilket uttrykk gir stor relativfeil om det evalueres for negative flyttall med stor absoluttverdi?

$x^2 + x^4$ ✗

$x + e^x$ ✗

$x + \sin x$ ✗

$1 + x^2$ ✗

$\sqrt{x^2+2} + x$ ✓ Når $|x|$ er stor og x er < 0 blir $\sqrt{x^2+2} \simeq |x| = -x$, og vi får $\simeq -x + x$

14: Hvilken av disse er lineær, inhomogen og andreordens?

$x_{n+1} + 2x_n = 3$ Førsteordens

$x_{n+2} + \underline{x_{n+1}\, x_n} = 1$ Ikke lineær

$x_{n+2} + 3x_{n+1} - n x_n = \cos n$ ✓

$x_{n+3} + n x_{n+1} - x_n = 4$ Tredjeordens

$x_{n+2} + 4x_{n+1} - x_n = 0$ Homogen

17: Løs

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = 2, \quad n \geq 0 \qquad x_0 = \frac{2}{3} \quad x_1 = 1$$

Karakteristisk likning:

$$r^2 - 2r + 4 = 0$$

Får vi at $r = 1 \pm i\sqrt{3}$.

Modulus: $\sqrt{1+3} = 2$.

Argumentet: $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Da vet vi at løsningen av den homogene likningen

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 4x_n = 0$$

er $x_n^h = \underset{\uparrow\,\rho}{2}^n\left(E\cos\left(n\underset{\uparrow\,\theta}{\frac{\pi}{3}}\right) + F\sin\left(n\underset{\uparrow\,\theta}{\frac{\pi}{3}}\right)\right)$

Vi gjetter på en konstant partikulærløsning $x_n^p = A$.

$$A - 2A + 4A = 2 \implies A = \frac{2}{3},$$

så da er

$$x_n = x_n^h + x_n^p = \frac{2}{3} + 2^n\left(E\cos\left(n\frac{\pi}{3}\right) + F\sin\left(n\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

$x_0 = \frac{2}{3}$, $x_1 = 1$, så

$$x_0 = \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + E\overbrace{\cos(0)}^{1} + F\overbrace{\sin(0)}^{0} = \frac{2}{3} + E$$

dermed er $E = 0$.

$$x_1 = 1 = \frac{2}{3} + 2 \cdot F \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3} + \sqrt{3}F$$

får ut at $F = \frac{1}{3\sqrt{3}}$.

Vi har da funnet løsningen

$$x_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3\sqrt{3}} 2^n \sin\left(n\frac{\pi}{3}\right),$$

som er alternativ E.

18: Hva skjer for store n når vi simulerer

$$x_{n+2} - \frac{7}{3}x_{n+1} + \frac{2}{3}x_n = 0 \qquad x_0 = 1,\ x_1 = \frac{1}{3}\ ?$$

Setter opp kar. likn.:

$r^2 - \frac{7}{3}r + \frac{2}{3} = 0$, så vi får $r_1 = 2$, $r_2 = \frac{1}{3}$.

Vi vet at

$$x_n = C\,2^n + D\left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$\begin{aligned} x_0 = 1 &: \ C + D = 1,\ C = 1 - D \\ x_1 = \frac{1}{3} &: \ 2C + \frac{D}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} D &= 1 \\ C &= 0 \end{aligned}$$

$x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$, og $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Men det er analytisk.

Her får vi avrundingsfeil på grunn av $x_1 = \frac{1}{3}$,

så simulert løsning vil være

$$\bar{x}_n = \varepsilon_1 2^n + (1+\varepsilon_2)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

Når n er stor nok vil da leddet $\varepsilon_1 2^n$ dominere helt, og til slutt får vi overflow.

Alternativ B.

10: Regn ut: $a1_{16} \cdot b2_{16}$.

$$
\begin{array}{r}
\underline{a\,1 \cdot b\,2} \\
1\,4\,2 \\
\underline{6\,e\,b} \\
= 6\,f\,f\,2
\end{array}
$$

$a \cdot 2 = 14$

$a \cdot b = 6e$

svaralternativ A.

20: Vi har $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0 \qquad n \geq 0.$

$x_0 = x_1 = 2$

For et naturlig tall n, la P_n være påstanden

P_n: x_n er et partall.

Hvordan viser vi det?

Vi observerer at P_0 og P_1 holder ($x_0 = x_1 = 2$).

Anta P_m holder for alle $m < k$, og $k \geq 2$.

Da er $x_k = x_{k-1} + x_{k-2} = \underset{\substack{\uparrow \\ P_{k-1}}}{2t} + \underset{\substack{\uparrow \\ P_{k-2}}}{2s}$ for nat. tall s, t

$x_k = 2(t+s)$, som viser P_k.

C: Vi sjekker om P_0 og P_1 er riktige og viser deretter at om P_n holder for $n = k-1$ og $n = k$ vil den også holde for $n = k+1$.

KALKULUS 4.2

5 a) Løs $x_{n+1} - 2x_n = 2$, $x_0 = 4$

Homogen: $x_{n+1} - 2x_n = 0$, har løsning

$x_n^h = C2^n$.

Gjetter på konstant part. løsn. A:

$A - 2A = 2$, $A = -2$.

Dermed er løsningen

$x_n = -2 + C2^n$.

Vi vil bestemme C:

$x_0 = 4 = -2 + C \Rightarrow C = 6$.

Endelig løsning er

$x_n = 6 \cdot 2^n - 2$.

b) $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 8x_n = 9n \quad x_0 = x_1 = 3$

Karakteristisk likning:

Gjett $x_n^h = r^n$, setter inn i homogen:

$r^{n+2} - 6r^{n+1} + 8r^n = 0$

$r^n(r^2 - 6r + 8) = 0$

Hvis det skal holde for alle n må

$r^2 - 6r + 8 = 0$

Løsninga her er $r_1 = 4$, $r_2 = 2$.

Homogen løsning er $x_n^h = C4^n + D2^n$.

Gjette på partikulærløsning: $An + B$.

$A(n+2) + B - 6A(n+1) - 6B + 8An + 8B = 9n$

...

$3An - 4A + 3B = 9n$

Da får vi at $A = 3$, $B = 4$.

$x_n = 3n + 4 + C4^n + D2^n$

$x_0 = 3$, så $4 + C + D = 3 \Rightarrow C = -1 - D$

$x_1 = 3$, så $3 + 4 + 4C + 2D = 3 \Rightarrow 4 = -2D + 4 + 4D$

Ender med $D = 0$, $C = -1$.

Vi ser da at

$x_n = 3n + 4 - 4^n$.

KOMPENDIET 6.5

7) $x_{n+2} - \frac{5}{2}x_{n+1} + x_n = 0 \qquad x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{1}{2}$

a) $r^2 - \frac{5}{2}r + 1 = 0$ har røttene $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = 2$.

Generell løsning er $C2^n + D\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Spes. fra x_0 og x_1 er

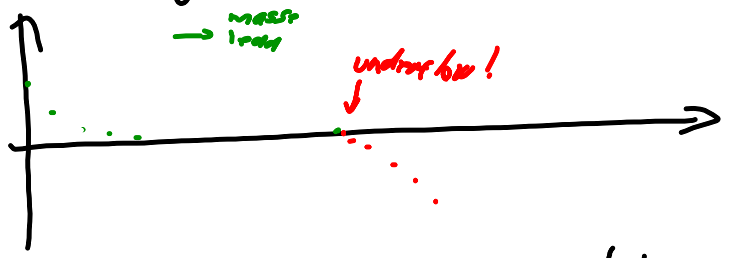
$(x_0)\quad C + D = 1, \qquad C = 1 - D$

$(x_1)\quad 2C + \frac{D}{2} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow D = 1, \quad C = 0.$

$x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$

b) Siden alt er eksakt representert går det bra til å begynne med.

Men! Etter underflow får vi avrundingsfeil og på sikt overflow.



c) På min maskin: x_{1080} blir rundet av til 0,

rundt x_{3135} får vi $-\infty$

og nan følger snart.