Kalkulus 11.2.15 c)

Finn $\sqrt[3]{1003}$ med 7 gjeldende desimaler.

Definér $f(x) = \sqrt[3]{1000}$ og gjør en Taylorutvikling om punktet $a = 1000$.

Vi ser at for en gitt n er

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(1003-1000)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}3^{n+1}$$

der $c \in (1000, 1003)$

Vi finner noen deriverte:

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-5/3}$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-8/3}$$

$(c \in (1000, 1003))$

$$|R_2 f(x)| = \left|\frac{\frac{10}{27}c^{-8/3}}{3!}3^3\right| = \frac{10\cdot 3^3}{27\cdot 3!}\left|\frac{1}{(\sqrt[3]{c})^8}\right|$$

avtagende med c:

$$\left|\frac{1}{(\sqrt[3]{c})^8}\right| \leq \left|\frac{1}{(\sqrt[3]{1000})^8}\right| = 10^{-8}$$

$$|R_2 f(x)| = \frac{10\cdot 3^3}{27\cdot 3!}\left|\frac{1}{(\sqrt[3]{c})^8}\right| \leq \frac{5}{3}\cdot 10^{-8}.$$

Feilen er passe liten.

Fra formlene over er

$$f(1000) = 10,\quad f'(1000) = \frac{1}{300},\quad f''(1000) = -\frac{2}{900\,000}.$$

Så

$$T_2 f(x) = 10 + \frac{1}{300}(x-1000) - \frac{2}{900\,000}\frac{1}{2!}(x-1000)^2$$

og fra det er

$$T_2 f(1003) = 10.0099900 = \frac{1\,000\,999}{100\,000}$$

Kompendiet 9.2

3) Vi er gitt

x	0	1	3	4
$f(x)$	1	0	2	1

a) Skriv

$$p(x) = c_0(x-1)(x-3)(x-4) + c_1 x(x-3)(x-4) + c_2 x(x-1)(x-4) + c_3 x(x-1)(x-3)$$

Dette kalles Lagrange-form.

Hvis $x_0, \dots, x_n$ er målepunktene er hvert ledd på formen $c_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} (x-x_j)$

Vi vil ha $p(0)=f(0)$, $p(1)=f(1)$ osv.

$$p(0) = c_0(0-1)(0-3)(0-4) = 1$$
$$-12c_0 = 1$$
$$c_0 = -\frac{1}{12}$$

$$p(1) = c_1(-2)(-3) = 0$$
$$c_1 = 0$$

$$p(3) = c_2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (-1) = 2$$
$$c_2 = -\frac{1}{3}$$

$$p(4) = c_3 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 1$$
$$c_3 = \frac{1}{12}$$

$$p(x) = -\frac{1}{12}(x-1)(x-3)(x-4) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-4) + \frac{1}{12}x(x-1)(x-3)$$

b)

x	0	1	3	4
$f(x)$	1	0	2	1

Newton-form.

$$q(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x(x-1) + c_3 x(x-1)(x-3)$$

$$q(0) \stackrel{\text{1B}}{=} 1 = c_0.$$

$$q(1) \stackrel{\text{1B}}{=} 0 = 1 + c_1 \Rightarrow c_1 = -1.$$

$$q(3) \stackrel{\text{1B}}{=} 2 = 1 - 3 + c_2 \cdot 3 \cdot 2 \Rightarrow c_2 = \frac{2}{3}$$

$$q(4) \stackrel{\text{1B}}{=} 1 = 1 - 4 + \frac{2}{3} \cdot 4 \cdot 3 + c_3 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 4 \Rightarrow c_3 = -\frac{1}{3}$$

Så Newton-interpolanten er

$$q(x) = 1 - x + \frac{2}{3}x(x-1) - \frac{1}{3}x(x-1)(x-3).$$

4 a) Anta at p_1 og p_2 er kvadratiske polynomer som interpolerer f i punktene x_0, x_1 og x_2. Definér $p = p_2 - p_1$. Hva er p i interpolasjons-punktene?

Jo,
$$p(x_0) = p_2(x_0) - p_1(x_0) = f(x_0) - f(x_0) = 0$$
$$p(x_1) = p_2(x_1) - p_1(x_1) = f(x_1) - f(x_1) = 0$$
$$p(x_2) = p_2(x_2) - p_1(x_2) = f(x_2) - f(x_2) = 0.$$

b) Vis at p_1 og p_2 må være samme polynom.

Algebraens fundamentalteorem sier at et polynom av grad n har maksimalt n nullpunkter (om det ikke er 0 overalt).

I a) så vi at $p = p_2 - p_1$, et kvadratisk polynom, har 3 nullpunkter. Så ved A.F.T. er $p(x) = 0$ for alle x.

Men da er
$$p_2(x) - p_1(x) = 0 \text{ for alle } x$$
$$p_2(x) = p_1(x) \text{ for alle } x$$
og $p_2 = p_1$.

c) Anta $x_0, x_1, \ldots, x_n$ er gitte punkter (forskjellige) og at f er en funksjon som er interpolert av n-tegradspolynomene p_1 og p_2, dvs.
$$p_1(x_i) = p_2(x_i) = f(x_i) \text{ for } i = 0, 1, \ldots, n.$$
Definér $p = p_2 - p_1$. Da er
$$p(x_i) = p_2(x_i) - p_1(x_i) = f(x_i) - f(x_i) = 0$$
$$\text{for } i = 0, 1, \ldots, n.$$
Men da har p $n+1$ nullpunkter, så ved alg. fund. teorem er $p(x) = 0$ for alle x.
$$p(x) = 0 \iff p_2(x) - p_1(x) = 0 \iff p_2(x) = p_1(x)$$
Så $p_1(x) = p_2(x)$ for alle x, $p_1 = p_2$. q.e.d.

Kompendiet 11.2

③ a) Vi skal numerisk beregne den deriverte til $f(x)=e^x$ i punktet $a=1$ via

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

La h starte med $h=10^{-4}$, og så skal vi gradvis minke h. Beregn feilen, og finn en h som gir minimal feil.

Vi lar $h=10^{-4}, 10^{-5}, \dots, 10^{-14}$

Vår tilnærming vil være

$$\frac{e^{a+h}-e^{a}}{h}$$

Den beste (dvs. minimale) feilen fikk vi med $h=10^{-8}$.

```
>>> from math import *
>>> a = 1.0
>>> exact = exp(1.0)
>>> for k in range(4,15):
    h = 10.0**(-k)
    newton_diff = (exp(a+h)-exp(a))/h
    error = exact_diff - newton_diff
    print('{: >8.2e}  {: >8.6f}  {:>9.2e}'.format(h, newton_diff, error))
```

```
1.00e-04  2.718418  -1.36e-04
1.00e-05  2.718295  -1.36e-05
1.00e-06  2.718283  -1.36e-06
1.00e-07  2.718282  -1.40e-07
1.00e-08  2.718282   6.60e-09
1.00e-09  2.718282  -2.15e-07
1.00e-10  2.718283  -1.55e-06
1.00e-11  2.718314  -3.26e-05
1.00e-12  2.718714  -4.32e-04
1.00e-13  2.717826   4.56e-04
1.00e-14  2.708944   9.34e-03
```

Kompendiet 11.3

① Finn en tilnærming til $f'(a)$ ved å bruke verdiene $f(a)$, $f(a+h)$ og $f(a+2h)$ og interpolere f i a, $a+h$, og $a+2h$ og så derivere interpolanten.

Vi er gitt

x	a	$a+h$	$a+2h$
$f(x)$	$f(a)$	$f(a+h)$	$f(a+2h)$

$$p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)(x-(a+h))$$

Vi skal ha

$$p(a) = f(a) = c_0$$

$$p(a+h) = f(a+h) = \underbrace{f(a)}_{=c_0} + c_1 \cdot h \Rightarrow c_1 = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$p(a+2h) = \underbrace{f(a)}_{=c_0} + \underbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{=c_1} 2h + c_2(2h) \cdot h = f(a+2h)$$

$$f(a) + 2f(a+h) - 2f(a) + c_2 \cdot 2h^2 = f(a+2h)$$

$$c_2 = \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{2h^2}$$

Fra dette får vi at

$$p(x) = f(a) + \frac{f(a+h)-f(a)}{h}(x-a) + \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{2h^2}(x-a)(x-(a+h))$$

Vi ønsker nå å beregne $p'(x)$.

$(uv)' = u'v + uv'$

$u = (x-a)$ $v = (x-(a+h))$

$$p'(x) = 0 + \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{2h^2}\left(x-(a+h)) + x - a\right)$$

Vi ønsker å bruke $f'(a) \approx p'(a)$.

Vi ser at

$$p'(a) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{2h^2}(-h)$$

$$= \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{f(a+2h) - 2f(a+h) + f(a)}{2h}$$

$$= -\frac{f(a+2h) - 4f(a+h) + 3f(a)}{2h}$$

Vi har altså

$$f'(a) \approx \frac{f(a+2h) - 4f(a+h) + 3f(a)}{2h}$$

Kompendiet 11.4

7 a) Estimere $f''(x)$ i $a=1$ når $f(x)=e^x$, med formelen

$$f''(a) \approx \frac{f(a-h)-2f(a)+f(a+h)}{h^2}$$

for $h=10^{-3}, 10^{-4}, \ldots, 10^{-14}$.

Se på feilen.

På denne maskinen ser $h=10^{-4}$ ut til å gi den beste (minste) feilen.

```
>>> from math import *
>>> a = 1.0
>>> exact = exp(1.0)
>>> for k in range(3,15):
    h = 10.0**(-k)
    diff_approx = (exp(a-h)-2.0*exp(a)+exp(a+h))/(h**2)
    error = exact - diff_approx
    print('{: >8.2e}  {: >8.6e}  {: >9.2e}'.format(h, diff_approx, error))
```

```
1.00e-03  2.718282e+00  -2.27e-07
1.00e-04  2.718282e+00  -3.78e-08
1.00e-05  2.718288e+00  -5.99e-06
1.00e-06  2.718270e+00   1.18e-05
1.00e-07  2.797762e+00  -7.95e-02
1.00e-08  0.000000e+00   2.72e+00
1.00e-09  4.440892e+02  -4.41e+02
1.00e-10  4.440892e+04  -4.44e+04
1.00e-11  4.440892e+06  -4.44e+06
1.00e-12  4.440892e+08  -4.44e+08
1.00e-13  0.000000e+00   2.72e+00
1.00e-14  0.000000e+00   2.72e+00
```