22. oktober, 2015

MAT-INF 1100: Obligatorisk oppgave 2

Innleveringsfrist: 5/11-2015, kl. 14:30

Informasjon

Den skriftlige besvarelsen skal leveres i obligkassa som står i gangen utenfor ekspedisjonen i 7. et. i Niels Henrik Abels hus senest *kl. 14.30 torsdag 5/11*. Du kan også levere via devilry. Besvarelsen *skal* være skrevet av deg selv og leveres ved hjelp av Devilry. Pass på at besvarelsen er ryddig ført og oppgavene skrevet i riktig rekkefølge slik at den som retter finner og forstår alt som blir levert.

Studenter som blir syke eller av andre grunner trenger å søke om utsettelse for denne obligatoriske oppgaven, må ta kontakt med studieadministrasjonen ved Matematisk institutt (7. et. Niels Henrik Abels hus, telefon 22 8558 88, e-post: studieinfo@math.uio.no) i god tid før innleveringsfristen.

Du kan lære masse fra medstudenter så det er både lurt og lærerikt å samarbeide med andre i arbeidet med oppgavene. Gruppelærerne har også anledning til å hjelpe, men ikke med ferdige løsninger. Målet med den obligatoriske oppgaven er at den skal bidra til læring, men *den endelige besvarelsen som du leverer må du skrive selv, og du må kunne redegjøre for innholdet ved en eventuell muntlig høring (aktuelt ved mistanke om ren avskrift, det gir dessverre ikke så mye læring :-))*.

Husk at de to obligatoriske oppgavene i MAT-INF 1100 begge må bestås for å kunne gå opp til endelig eksamen i kurset. *For å få bestått på denne første obligatoriske oppgaven må du gjøre seriøse løsningsforsøk på alle oppgavene, og minst fire av de syv deloppgavene bør være riktig besvart.*

Hvis du har samarbeidet nært med noen, er det fint om du skriver vedkommendes navn her:

Oppgaver

Oppgave 1. Ved hjelp av en GPS har vi målt farten v til et objekt som beveger seg. Målingene er gjort ved $N+1$ tidspunkter $(t_i)_{i=0}^N$ slik at resultatet er en følge av tall-par $(t_i, v_i)_{i=0}^N$ der v_i angir farten ved tidspunktet t_i.

a) Gi en algoritme for å beregne en tilnærming til objektets akselle-rasjon $a(t) = v'(t)$ ut fra de beregnede verdiene (t_i, v_i) av farten.

b) Gi en algoritme for å beregne en tilnærming til objektets avstand $s(t)$ fra startpunktet ut fra de beregnede verdiene når $v(t) = s'(t)$ og $s(t_0) = 0$.

c) Fila
`http://www.uio.no/studier/emner/matnat/math/MAT-INF1100/h15/running.txt`
er en logfil fra en løpetur, der vi på hver linje finner kommasepa-rerte tid/fart verdier. Du har lært at du kan lese inn verdiene fra denne fila i to vektorer `t` og `v` ved hjelp av følgende kode:

```
t = []
v = []
infile = open('running.txt','r')
for line in infile:
    tnext, vnext = line.strip().split(',')
    t.append(float(tnext))
    v.append(float(vnext))
infile.close()
```

Last ned fila `running.txt` og kjør denne koden, og bruk algorit-mene fra a) og b) til å lage to plott: Et der du plotter objektets akselerasjon mot tid, og et der du plotter objektets avstand fra startpunktet mot tid.

Oppgave 2. Vi har differensialligningen

$$x' - x^2 = 1, \quad x(0) = 1. \tag{1}$$

a) Finn løsningen $x(t)$ av differensialligningen analytisk. (Hint: Lig-ningen er separabel.)

b) Løs ligningen numerisk på intervallet $[0, 0.6]$ ved å ta 6 steg med Eulers metode (med kalkulator eller datamaskin). Plott den nu-meriske løsningen sammen med den eksakte løsningen (for hånd eller ved hjelp av datamaskin).

c) Gjenta (b), men bruk Eulers midtpunktmetode i stedenfor Euler's metode. Plott den numeriske løsningen du nå får sammen med løsningene du plottet i (b).

d) Et alternativ til de to metodene over er som følger. Anta at vi skal løse $x' = f(t, x)$. Den nye metoden er basert på at steget fra tilnærmingen (t_k, x_k) til tilnærmingen (t_{k+1}, x_{k+1}) beregnes ved

$$x_{k+1} = x_k + hf\big(t_k + h/2, (x_{k+1} + x_k)/2\big).$$

For ligningen (1) gir dette

$$x_{k+1} = x_k + h\left(1 + \frac{(x_k + x_{k+1})^2}{4}\right). \tag{2}$$

Denne ligningen kan løses med hensyn på x_{k+1}, noe som gir

$$x_{k+1} = \frac{2 - hx_k - 2\sqrt{1 - h^2 - 2x_k h}}{h} \tag{3}$$

Lag en algoritme som beregner x_{k+1} ved hjelp av denne formelen. Er det noen begrensninger på hvilken h som kan brukes?

Gjør 6 steg som for de andre metodene, og legg også denne løsningen inn i det samme plottet som de andre løsningene. Hvilken metode ser ut til å fungere best?

e) (Frivillig.) Ligningen (2) har to løsninger, og i (3) plukker vi ut en av disse. Forklar hvorfor vi ikke velger den andre løsningen.

Lykke til!!