Forelesning 30/9-2016

Onsdag: Inhomogene differensligninger, simulering, avrundingsfeil

I dag:
- Differensligninger og avrundingsfeil
- Taylorpolynomer

Differensligninger og avrundingsfeil

(Eks. 6.25 og seksjon 6.5.1 i kompendiet)

Skal se på simulering av ligningen

$$x_{n+2} - \frac{19}{3}x_{n+1} + 2x_n = -10, \quad x_0 = 2,\ x_1 = 8/3. \tag{6.22}$$

Analytisk løsning

$$X_n = 3 + C\left(\frac{1}{3}\right)^n + D \cdot 6^n$$

Startverdien gir $C = -1$ og $D = 0$

Endelig løsning $X_n = 3 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \longrightarrow 3$ for store n

$$\tilde{x}_5 = 2.99588477366,$$
$$\tilde{x}_{10} = 2.99998306646,$$
$$\tilde{x}_{15} = 3.00001192858.$$
$$\tilde{x}_{20} = 3.09329859009,$$
$$\tilde{x}_{30} = 5641411.98633,$$
$$\tilde{x}_{40} = 3.41114428655 \times 10^{14},$$

Sprøtt resultat!

Forklaring: Simulering $X_n = -10 + \frac{19}{3}X_{n-1} - 2X_{n-2}$

$X_0 = 2$ og $X_1 = \frac{8}{3} + \underset{\approx 10^{-17}}{\varepsilon}$

Løser dette analytisk så får vi

$$\tilde{X}_n = 3 - \underset{C \approx 1}{(1 - \hat{\varepsilon})}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \underset{D \approx 10^{-17}}{\hat{\varepsilon}}\, 6^n \qquad 6^{21} \approx 10^{16}$$

Ikke et enestående eksempel

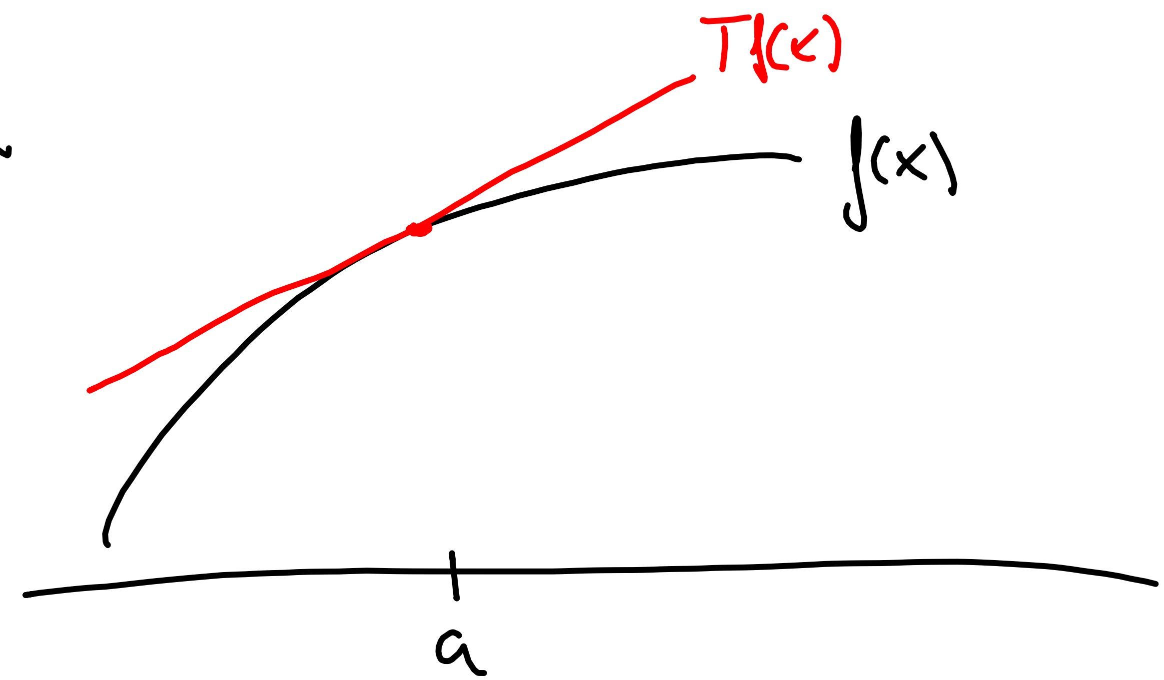
Eks 6.31 $\quad \tilde{X}_n = 6 + 6n - (\underset{\approx 10^{-17}}{6 + \varepsilon_1})\left(\frac{1}{2}\right)^n + \underset{\approx 10^{-17}}{\varepsilon_2}\left(\frac{4}{3}\right)^n$

Taylorpolynomer

(Seksjon 11.1 i Kalkulus

Ofte er det nyttig å kunne tilnærme en „komplisert" funksjon med en „enkel" funksjon

Tangenten til f i et punkt a er en god tilnærming



Formel $Tf(x) = f(a) + (x-a)f'(a)$

God? $Tf(a) = f(a)$

$(Tf)'(a) = f'(a)$

Dette er en god tilnærming! Kan den generaliseres?

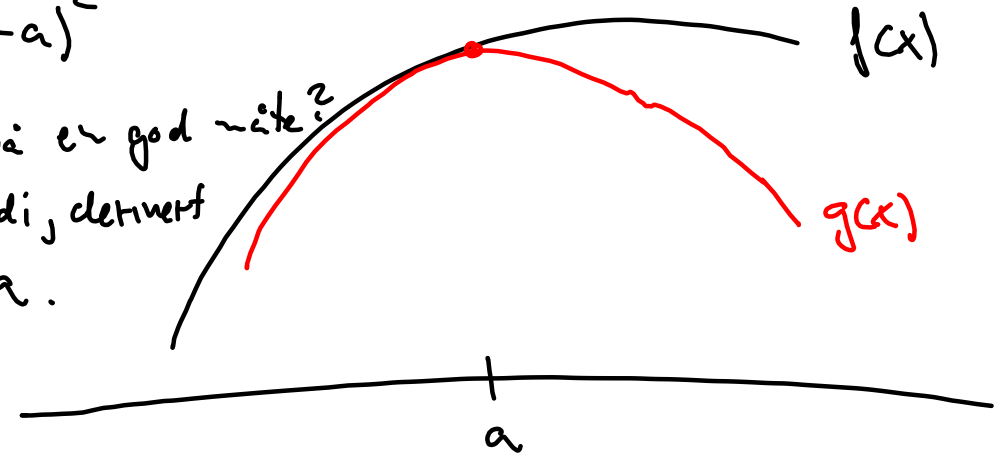
Kan kalle denne for $T_1 f(x)$ – Taylor polynomet av grad 1 rundt a

Kan tangenten generaliseres?

Hva om vi tilnærmer f med et polynom av grad 2?

Vil finne en $g(x)$ polynom på formen

$$g(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2$$



Hvordan „bruke" c_0, c_1 og c_2 på en god måte?
vi ønsker at g har samme verdi, derivert og annen-derivert som f i a.

Det vil si

(1) $g(a) = f(a)$ $\qquad g(a) = \underline{c_0 = f(a)}$

(2) $g'(a) = f'(a)$ $\qquad g'(a) = \underline{c_1 = f'(a)}$

(3) $g''(a) = f''(a)$ $\qquad g''(a) = \left(c_2(x-a)^2\right)'' = 2c_2 = f''(a) \Rightarrow c_2 = \frac{1}{2}f''(a)$

Vi får $\quad g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$

Har samme funksjonsverdi, derivert og dobbeltderivert som f i a

kaller denne for Taylor-polynom av grad 2 rundt a.

kaller den for $T_2 f(x)$

Kan generalisere Taylor-polynomet til grad n

$$T_n f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \frac{1}{6}(x-a)^3 f'''(a) + \dots + \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)$$

er Taylorpolynomet til f i a av grad n

kan sjekke $(T_n f)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ $\quad k = 0, 1, 2, \dots, n$

(hele tiden underforstått at $f^{(k)}$ eksisterer

$$\left((x-a)^n\right)' = n(x-a)^{n-1} \cdot 1 \qquad (x-a)' = 1$$

f.eks $\left((x-a)^2\right)' = 2(x-a) \cdot 1$

Eks $f(x) = e^x \qquad a = 0$

$f^{(k)}(x) = e^x \quad k = 0, 1, 2, \dots$ og siden $e^0 = 1 = f^{(k)}(a)$ for $k = 0, 1, 2, \dots$

Får vi $T_n f(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots + \frac{1}{n!}x^n$

Eks Taylorpolynomet til $f(x) = \sin x$ rundt $a = 0$

$f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$ $\quad f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$

Dermed er $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 1$

$$T_n \sin(x) = 0 + x + \frac{1}{2}x^2 \cdot 0 + \frac{1}{6}x^3(-1) + \frac{1}{4!}x^4 \cdot 0 + \frac{1}{5!}x^5 \cdot 1 + \dots +$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots$$

Kan skrive $T_{2n-1} \sin(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = T_{2n} \sin(x)$

Eks 3 $\quad f(x) = \cos x \qquad a = 0$

$$T_{2n} \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots$$

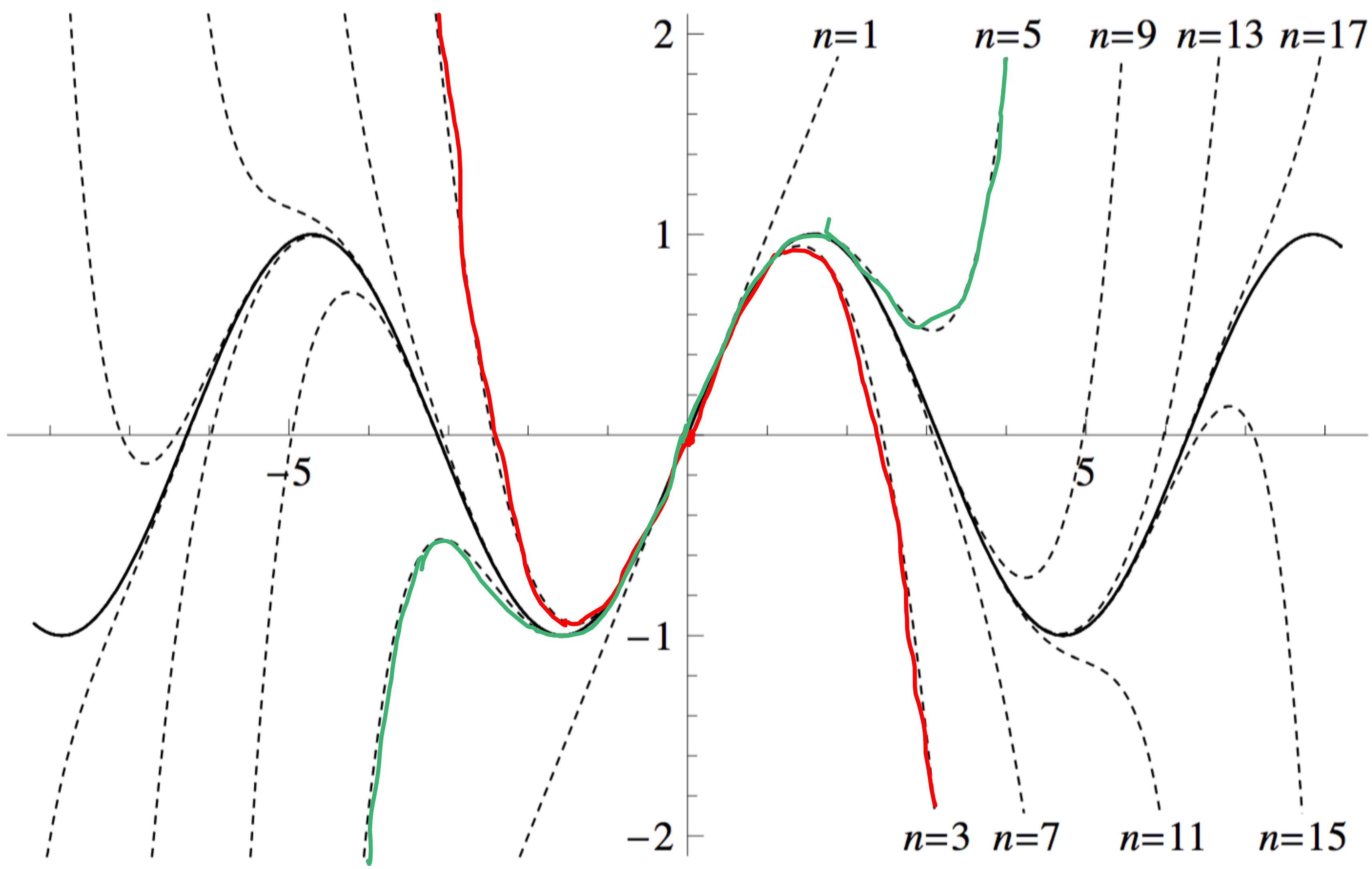
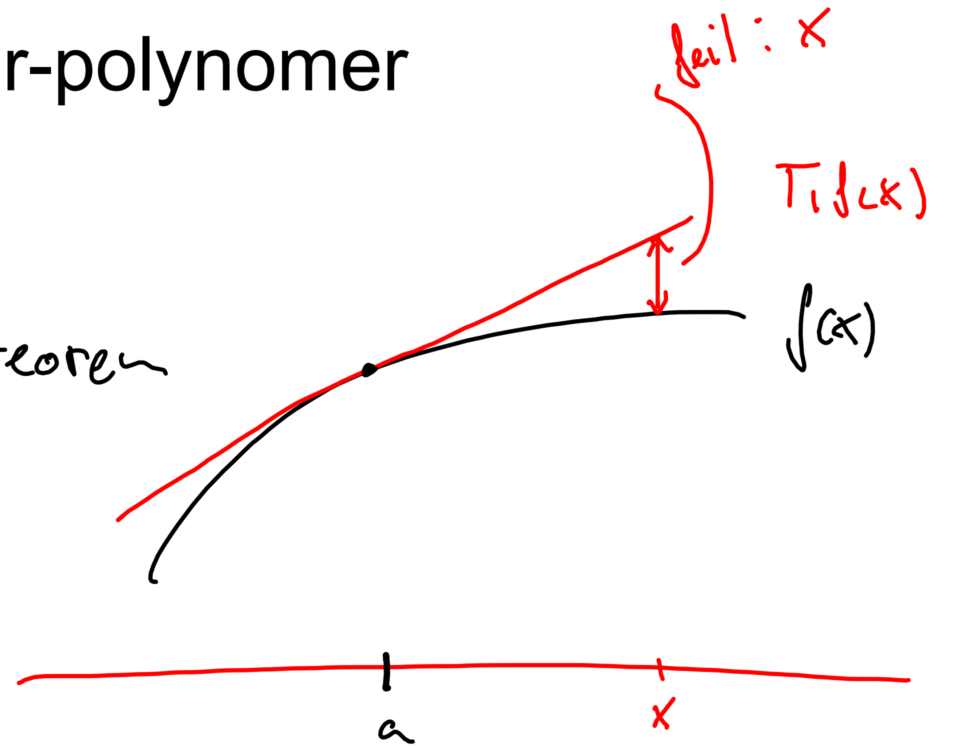


Figure 9.1. The Taylor polynomials of $\sin x$ (around $a = 0$) for degrees 1 to 17.

Restledd for Taylor-polynomer

(Seksjon 11.2 i kompendiet)

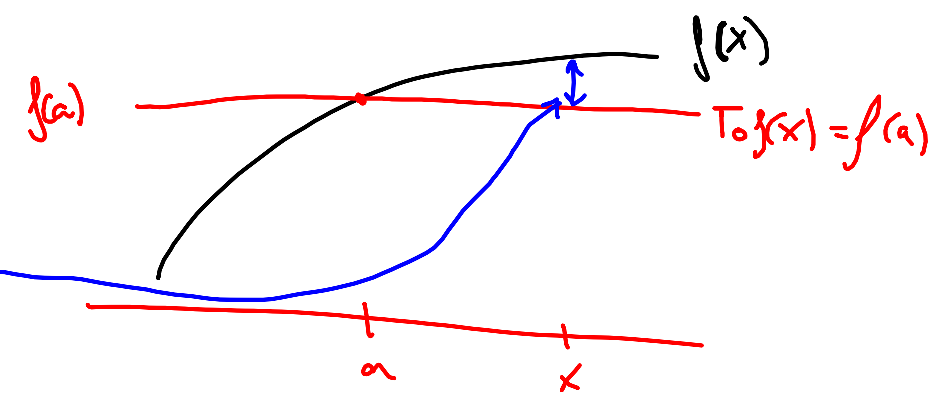


Analysens fundamentalteorem

$$f(b)-f(a)=\int_a^b f'(t)\,dt$$

kan sette $b=x$ og skrive

$$f(x)=\underbrace{f(a)}_{=\,T_0 f(x)}+\underbrace{\int_a^x f'(t)\,dt}_{\text{Rest/feil! i } T_0 f(x)}$$



Neste gang skal vi bruke delvis integrasjon til å studere feilen i Taylorpolynomer