# Interpolasjon

Taylorpolynomet av grad $n$ har samme funksjonsverdi og $n$ første deriverte som en funksjon $f$ i et punkt $a$.

Alternativ: Finn et polynom av grad $n$ som har samme verdi som $f$ i $n+1$ forskjellige punkter.

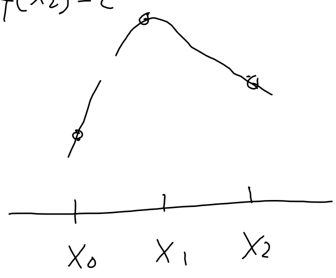
Problemformulering. La $f$ være en funksjon definert på et intervall $[a,b]$, og la $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ være $n+1$ forskjellige tall i $[a,b]$. Interpolasjonspolynomet av grad $n$ for $f$, i disse punktene er polynomet $p_n = P(f; x_0, \ldots, x_n)$ som tilfredstiller

$$p_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Merk: Vi bruker bare $n+1$ funksjonsverdier fra $f$, altså $n+1$ tall.

Eks. Anta at $x_0 = 0, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2$

$f(x_0) = 1, \quad f(x_1) = 3, \quad f(x_2) = 2$




Finn andregradspolynom

$$\boxed{P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2}$$

slik at $P(x_0) = 1, \quad P(x_1) = 3$

$P(x_2) = 2$

eller

$$\boxed{P(0) = 1, \quad P(1) = 3, \quad P(2) = 2}$$

$1 = P(0) = c_0$

$3 = P(1) = c_0 + c_1 + c_2 = 1 + c_1 + c_2$

$2 = P(2) = c_0 + 2c_1 + 4c_2 = 1 + 2c_1 + 4c_2$

To ligninger for $c_1$ og $c_2$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{I} & c_1 + c_2 = 2 \\ \text{II} & 2c_1 + 4c_2 = 1 \end{array}\right\} \quad c_1 = 7/2, \quad c_2 = -3/2$$

Dermed er $P(x) = 1 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}x^2$

En gang til. Skriv $P$ på formen

$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$

$= \boxed{b_0 + b_1 x + b_2 x(x-1)}$

Betingelser som før: $\boxed{P(0) = 1, \quad P(1) = 3, \quad P(2) = 2}$

$1 = P(0) = b_0$

$3 = P(1) = b_0 + b_1 + 0 = 1 + b_1, \quad b_1 = 2$

$2 = P(2) = b_0 + 2b_1 + b_2 \cdot 2 = 1 + 2 \cdot 2 + 2b_2, \quad 2b_2 = -3$

$b_2 = -3/2$

$P(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2}x(x-1)$ (av grad 2)

NB! Kun ett polynom som løser problemet

Samme løsning med de to metodene.

Newtonformen for interpolasjonspolynomet

Gitt $f$ og $n+1$ punkter $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$

Newtonformen er gitt ved

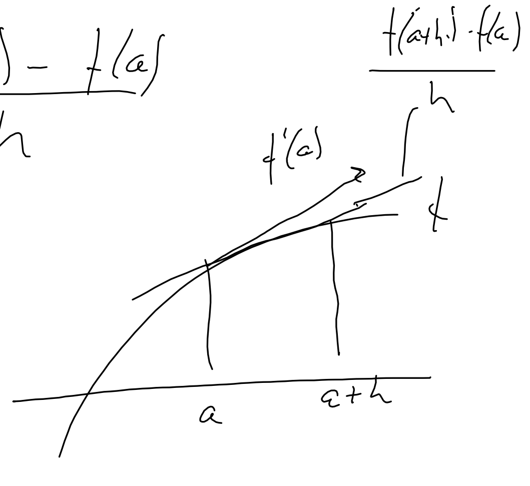
$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

# Numerisk derivasjon

Hvordan finne tilnærming til $f'$ når vi bare kan regne ut funksjonsverdier for $f$?

Definisjon:
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Tilnærming: Velg en passende $h > 0$
$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$




Eks. $f(x) = \sin x$

$a = 1, \quad h = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots$

$f'(x) = \cos x$

$f'(1) = \cos 1$