# Litt mer om numerisk derivasjon.

Gitt en funksjon $f$, hvordan kan vi tilnærme den deriverte hvis vi bare kan regne ut funksjonsverdier?

Def av derivert:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Vi kan bruke tilnærmingen

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Hva med feilen?

Husk Taylor med restledd:

$$f(\underbrace{a+h}_{x}) = f(a) + h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$$

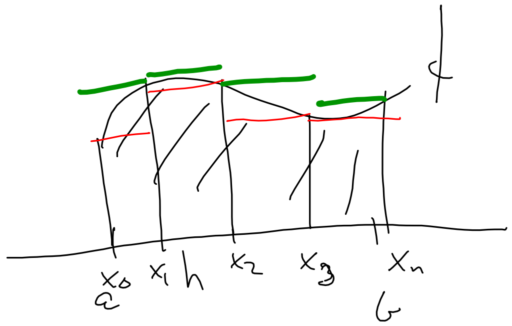
$$\xi \in (a, a+h)$$

$$f(a+h) - f(a) = h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$$

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - \frac{h}{2} f''(\xi)$$

$$f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\frac{h}{2} f''(\xi)$$

# Numerisk integrasjon




$$\underline{I} = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1})$$

$$\overline{I} = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

$$m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

$$M_i = \max_{\dots} f(x)$$

Vi lar intervallene bli smalere og smalere.

Hvis da $\underline{I}$ konvergerer mot $\overline{I}$ sier vi at $f$ er integrerbar og

$\int_a^b f(x)\,dx$ er gitt ved den felles grenseverdien

Anta at $x_i - x_{i-1} = h$ for alle $i$

Da har vi to tilnærminger

$\underline{I}(h)$, $\overline{I}(h)$.

$f$ er integrerbar hvis $\lim_{h \to 0} \underline{I}(h) = \lim_{h \to 0} \overline{I}(h)$

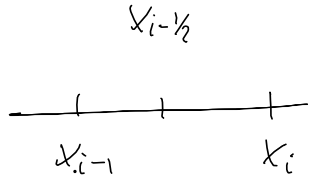
Vi kan erstatte $m_i = \min_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$ og

$$M_i = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x)$$

med $f(t_i)$ der $t_i$ er et vilkårlig tall i $[x_{i-1}, x_i]$.

# Midtpunktmetoden

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} h\, f(x_{i-1/2})$$

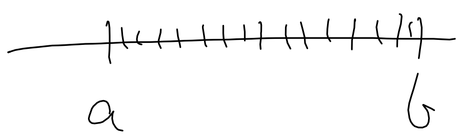



$$= h \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2})$$

**Algoritme** Begynn med $I_{mid}(h_0)$, regn ut $I_{mid}(h_0/2)$, $I_{mid}(h_0/4)$, ...

Stopp når forskjellen mellom to tilnærminger blir liten.

$$\frac{|I_{mid}(h^n) - I_{mid}(h^{n-1})|}{|I_{mid}(h^n)|} \leq \varepsilon$$




der $\varepsilon$ er ønsket relativ feil.