Førsteordens differensialligninger.

Dette er en ligning på formen

$x' = f(t,x)$ der $x = x(t)$ er en ukjent funksjon.

Eks.

$x' = 3$ $\quad (x'(t) = 3)$, $\quad x(t) = 3t + C$

$x' = 2t$ $\quad (x'(t) = 2t)$, $\quad x(t) = t^2 + C$

$x' = x$

$x' = \cos(x+t)$

Løsning $x(t) = Ce^t$

Startverdi $\boxed{x(0) = 1}$, $\quad 1 = x(0) = C \cdot 1$, $C = 1$

$x(t) = e^t$ med startverdi

Konklusjon: For at differensialligningen $x' = f(t,x)$ skal ha en entydig løsningen må vi legge til en startverdi $x(a) = x_0$.

Fullstendig problem:

$$\boxed{x' = f(t,x), \quad x(a) = x_0}$$

Familier av løsninger

Ligningen $x' = f(t,x)$ gir opphav til en hel familie av løsninger. Startverdien $x(a) = x_0$ plukker ut et medlem i familien.

Hva betyr $x' = f(t,x)$? , $x(0) = 1$

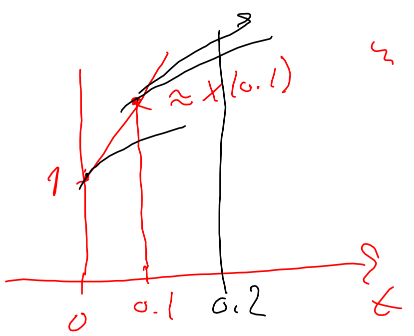
Vi ser at om vi setter $t = 0$:

$x'(t) = f(t, x(t))$, $x'(0) = f(0, x(0)) = f(0,1)$

$x'(t) = t + x(t)$

<u>Eks.</u> $x' = t + x$, $x(0) = 1$

$x'(0) = 0 + x(0) = 0 + 1 = 1.$



Tilnærming med rett linje

$L(t) = 1 + t$, $L(0) = 1$
$L'(0) = 1$

Eulers metode med formel

Vi har ligningen $x' = f(t, x)$, $x(a) = x_0$

Vi kan regne ut $x'(a) = f(a, x(a)) = f(a, x_0)$.

1. Da er tangenten til løsningen i a

$$T_1(t) = x(a) + (t-a)\,x'(a) = x_0 + (t-a)\,f(a, x_0)$$

2. Følg tangenten til $t_1 = a + h$.

$x_1 = T_1(a+h) = x_0 + h\,f(a, x_0)$

Har kommet fra $(t_0, x_0) = (a, x_0)$ til (t_1, x_1)
$= (a+h, x_1)$

Regn ut ny tangent i (t_1, x_1)
og følg den til (t_2, x_2)

Algoritme:

$$\left.\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h\,f(t_k, x_k) \\ t_{k+1} &= t_k + h \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots K.$$