Forelesning 9/11-2016

Sist: separable diff-ligninger

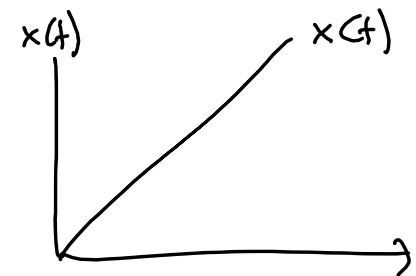
Idag: analytisk løsning av diff-ligninger - kap 10.1-10.5 i Kalkulus

Fredag: 10.6 i Kalkulus + feilanalyse numerisk derivasjon

Første ordens lineære ligninger (10.1)

Oppvarming

Fart $v(t) = x'(t) = 1$



Hva er $x(t)$ hvis $x(0) = 0$?

Løses enkelt med integrasjon / antiderivert

$$\int x'(t)\,dt = \int 1\,dt$$

Får $x(t) = t + C$ for konstant C

Har $x(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

$\Rightarrow \underline{x(t) = t}$

Generaliserer dette...

10.1.3 Setning Anta at funksjonene f og g er kontinuerlige på et åpent intervall I, og la F være en vilkårlig antiderivert til f på I. Da er løsningene av differensialligningen

$$y' + f(x)y = g(x)$$

på I gitt ved

$$y = e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)} g(x)\,dx + C\right).$$

Første ordens lineære diff-ligninger (10.1)

$$* \quad y'(x) + f(x)\,y(x) = g(x) \quad \text{for alle } x \in I \text{ (intervall)}$$

funksjon

$y(x)$ er en ukjent funksjon

Finnes det en generell strategi for å løse $*$? Ja!

Generell løsningsstrategi:

① La $F(x)$ være en antiderivert av $f(x)$, dvs. slik at

$$F'(x) = f(x)$$

② Multipliserer ligningen $*$ med $e^{F(x)}$ (integrerende faktor)

$$\underbrace{e^{F(x)} \cdot y'(x) + e^{F(x)} f(x) y(x)}_{\left(e^{F(x)} y(x)\right)'} = e^{F(x)} \cdot g(x)$$

$$\left(\underbrace{e^{F(x)} y(x)}\right)' = \underbrace{e^{F(x)} g(x)}$$

Ser at ↑ er en antiderivert til ↑

③ $$e^{F(x)} y(x) = \int e^{F(x)} g(x)\,dx + C$$

ganger med $e^{-F(x)}$

$$\Rightarrow \quad \underline{y(x) = e^{-F(x)}\left(\int e^{F(x)} g(x)\,dx + C\right)} \quad \text{for } C \in \mathbb{R}$$

- Alle løsninger til $*$ er på denne formen
- Det er ∞ mange løsninger, en for hver $C \in \mathbb{R}$

Eks $\quad y'(x) = r\, y(x)$

Slike ligningen kan f.eks beskrive befolkningsvekst med vekstrate r. Feks. 2% vekst pr tidsenhet

$$y'(x) = 0.02\, y(x)$$

Skriver om til

$$\underbrace{y'(x) - r\, y(x)}_{f(x) = -r} = \underbrace{0}_{g(x)=0}$$

Bruker integrerende faktor

(1) $F(x) = -rx$

(2) Ganger med int. faktor $e^{F(x)} = e^{-rx}$

$$\underbrace{e^{-rx} y'(x) - e^{-rx} r\, y(x)}_{\left(e^{-rx} y(x)\right)'} = 0$$

$$\left(e^{-rx} y(x)\right)' = 0$$

(3) Finner antiderivert

$$e^{-rx} y(x) = C \qquad \text{for } C \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = C e^{rx}} \qquad \text{(Generell løsning)}$$

Hvis vi kjenner $y(0) = P$, må $C = P$

$$\Rightarrow \underline{y(x) = P e^{rx}} \qquad \text{(spesiell løsning)}$$

Eks 10.1.4

$$y' + \underset{f(x)}{2x}\, y = \underset{g(x)}{x}$$

(Husk $y = y(x)$)

① $f(x) = 2x \Rightarrow F(x) = x^2$

② Ganger med $e^{F(x)} = e^{x^2}$

$$\underbrace{e^{x^2} y' + e^{x^2} 2x y}_{} = e^{x^2} x$$

$$\left(e^{x^2} y\right)' = e^{x^2} x$$

③ Finner antiderivert

$$e^{x^2} y = \int e^{x^2} x \, dx + C$$

ganger med e^{-x^2}

$$y = e^{-x^2}\left(\int e^{x^2} x \, dx + C\right)$$

substitusjon $u = x^2$ og integrerer

$$= e^{-x^2}\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C\right)$$

$$= \underline{\frac{1}{2} + C e^{-x^2}}$$

(generell løsning)

Randbetingelse $y(0) = 1$

$$y(0) = \frac{1}{2} + C \cdot 1 = 1 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-x^2}}}$$

(spesiell løsning)

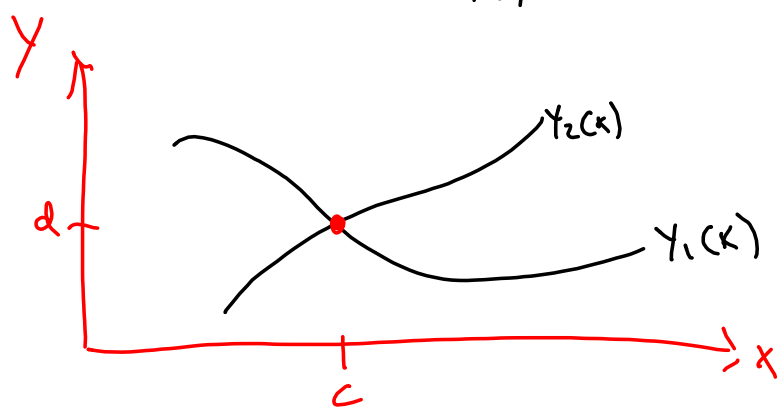
Eksistens og entydighet (10.3)

10.3.1 Setning Anta at f og g er kontinuerlige funksjoner på det åpne intervallet I. La c være et tall i I og anta at d er et fritt valgt tall i $\mathbb{R}$. Da finnes det nøyaktig én løsning av differensialligningen

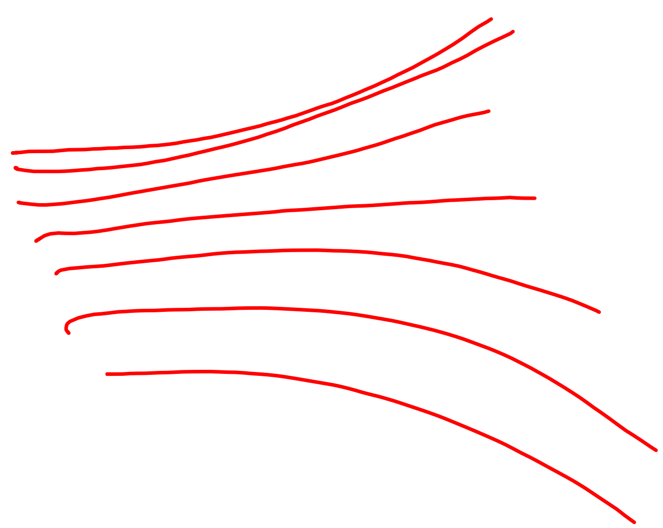
$$y' + f(x)y = g(x) \qquad x \in I$$

slik at $y(c) = d$. Denne løsningen er

$$y(x) = e^{-\underbrace{\int_c^x f(t)\,dt}_{F(x)}}\left(\int_c^x g(t)e^{\overbrace{\int_c^t f(s)\,ds}^{F(t)}}\,dt + d\right).$$



Er dette mulig? Nei!



Løsninger krysser ikke

Andre ordens lineære ligninger (10.5)

Skal se på ligninger på formen

$$* \quad y'' + py' + qy = 0 \qquad \text{for } p, q \in \mathbb{R}$$

- Andre orden
- Lineær
- Homogen (høyre side = 0)

(Husk: $y = y(x)$!)

Skal forsøke å finne $y(x)$

Lemma 10.5.1: Hvis $y_1(x)$ og $y_2(x)$ begge er løsninger av $*$, så er

$$y(x) = C y_1(x) + D y_2(x) \quad \text{en løsning}$$

for alle $C, D \in \mathbb{R}$

Hvordan kan vi finne løsninger?

Husk at $y = e^{-bx}$ er en løsning til $y' + by = 0$

Vi prøver med $\boxed{y(x) = e^{rx}}$ for en ukjent $r \in \mathbb{R}$

Setter $y(x)$ inn i $*$

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad : \quad y'(x) = re^{rx} \text{ og } y''(x) = r^2 e^{rx}$$

$$r^2 e^{rx} + p \cdot re^{rx} + q \cdot e^{rx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad e^{rx} \underbrace{(r^2 + pr + q)} = 0$$

$$** \quad r^2 + pr + q = 0 \quad \text{karakteristisk ligning for } *$$

Hvis vi kan finne r som løser kar. ligh. så har vi funnet løsning av $*$ $y(x) = e^{rx}$!

3 tilfeller av løsning av $**$

1. To reelle løsninger $r_1 \neq r_2 \in \mathbb{R}$
2. En reell løsning $r_1 = r_2 \in \mathbb{R}$
3. To komplekse løsninger $r_1 = \bar{r}_2 \in \mathbb{C}$

Tilfelle 1: to karakteristiske røtter

Eks. 10.5.5 $\quad y'' + y' - 2y = 0$

karakteristisk ligning $r^2 + r - 2 = 0$

Løsninger er $r_1 = -2$ og $r_1 = 1$

Betyr at $y_1(x) = e^{-2x}$ er en løsning

$y_2(x) = e^{x}$ — " —

I tillegg er $\underline{y(x) = Ce^{-2x} + De^{x}}$ for $C, D \in \mathbb{R}$
(generell løsning)

<u>Alle</u> løsninger er på denne formen

Randbetingelsen (initialbetingelser): f.eks $y(0) = 1$ og $y'(0) = 0$

$y(0) = C + D = 1 \qquad y'(0) = -2C + D = 0$

$\Rightarrow C = \frac{1}{3}$ og $D = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \underline{y(x) = \frac{1}{3}e^{-2x} + \frac{2}{3}e^{x}}$ (spesiell løsning)

10.5.4 Setning Anta at den karakteristiske ligning til

$$y'' + py' + qy = 0$$

har to reelle røtter r_1 og r_2. La c, d og e være fritt valgte, reelle tall. Da finnes det nøyaktig én løsning av differensialligningen slik at

$$y(c) = d \qquad \text{og} \qquad y'(c) = e.$$

Vi kan med andre ord bestemme løsningen ved å foreskrive hvilke verdier y og y' skal ha i et fritt valgt punkt.

Tilfelle 2: en reell karakteristisk rot

Vet at $y(x) = e^{rx}$ er en løsning (r løser $**$)

Er det fler? Ja!

$y(x) = xe^{rx}$ er også en løsning

Generell løsning

$y(x) = C \cdot e^{rx} + Dxe^{rx}$

Eks: $y'' - 4y' + 4y = 0$

karakteristisk ligning: $r^2 - 4r + 4 = 0$

Løsning $r = 2 \pm 0$ $r = 2$ eneste løsning.

$\Rightarrow$ Generell løsning $y(x) = C \cdot e^{2x} + D \cdot xe^{2x}$ $C, D \in \mathbb{R}$

10.5.9 Setning Anta at den karakteristiske ligningen til

$$y'' + py' + qy = 0$$

bare har en rot r_1. La c, d og e være fritt valgte, reelle tall. Da finnes det nøyaktig én løsning av differensialligningen slik at

$$y(c) = d \qquad \text{og} \qquad y'(c) = e.$$

Tilfelle 3: to komplekse karakteristiske røtter

Neste forelesning