Forelesning 11/11-2016

Sist: analytisk løsning av diff-ligninger - kap 10.1-10.5 i Kalkulus

Idag:

- Resten av 10.5 + 10.6 i Kalkulus
- Feilanalyse numerisk derivasjon og integrasjon

Sist forelesning: Kapittel 10.5

10.5.14 Teorem Løsningene til differensialligningen

$$y'' + py' + qy = 0$$

avhenger av røttene i den karakteristiske ligningen $r^2 + pr + q = 0$.

(i) Dersom den karakteristiske ligningen har to (forskjellige) reelle røtter r_1 og r_2, er løsningene

$$y = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}.$$

(ii) Dersom den karakteristiske ligningen bare har én rot r_1, er løsningene

$$y = Ce^{r_1 x} + Dxe^{r_1 x}.$$

Tilfelle 3: to komplekse karakteristiske røtter

$$* \quad r^2+pr+q=0$$

Når $r_1 = a+ib$ $\quad r_2 = a-ib$ $\quad$ for $a,b\in\mathbb{R}$

er løsningen av *, dvs $r_1=\overline{r_2}$, da er

e^{r_1x} og e^{r_2x} $\quad$ løsninger, komplekse

Generell løsning

$$** \quad y(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$$ (alle løsninger kan skrives slik)

Da kan $y(x)\in\mathbb{C}$

Hvis vi velger $C_1=\overline{C_2}$, f.eks.

$C_1=A+iB$ $\quad$ for $A,B\in\mathbb{R}$

$C_2=A-iB$

kan vi skrive generell løsning **

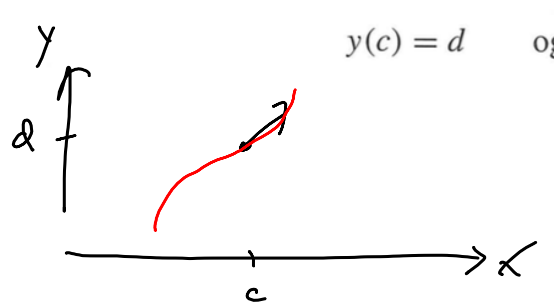
$y(x)=e^{ax}(C\cos bx + D\sin bx)$, dvs reell funksjon

10.5.13 Setning Anta at den karakteristiske ligning til

$$y''+py'+qy=0$$

har to komplekse røtter r_1 og r_2. La c, d og e være fritt valgte, reelle tall. Da finnes det nøyaktig én løsning av differensialligningen slik at

$$y(c)=d \quad \text{og} \quad y'(c)=e.$$



Eks: $y'' + 2y' + 4y = 0$ $\quad (y = y(x)!)$

Karakteristisk ligning: $r^2 + 2r + 4 = 0$

Løsninger: $r_1 = -1 - i\sqrt{3}$ $\quad r_2 = \underset{a}{-1} + i\underset{b}{\sqrt{3}}$

$r_1 = \overline{r_2}$

Generell reell løsning er på formen

$$y(x) = e^{ax}(C\cos bx + D\sin bx)$$

$$= e^{-x}(C\cos\sqrt{3}x + D\sin\sqrt{3}x)$$

Randbetingelser: krever $y(0) = d$ og $y'(0) = e$

$$y(0) = C\cdot 1 + D\cdot 0 = \underline{C = d}$$

$$y'(x) = -e^{-x}(C\cos\sqrt{3}x + D\sin\sqrt{3}x)$$

$$+ e^{-x}(-C\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x + D\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x)$$

så $y'(0) = -(C + D\cdot 0) + \sqrt{3}(-C\cdot 0 + D)$

$$= -C + \sqrt{3}D = e$$

$$\Rightarrow \underline{D = \frac{e+d}{\sqrt{3}}}$$

Løsning

$$\underline{y(x) = e^{-x}\left(d\cos\sqrt{3}x + \frac{d+e}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x\right)}$$

Oppsummering kap 10.5

10.5.14 Teorem Løsningene til differensialligningen

$$y'' + py' + qy = 0$$

avhenger av røttene i den karakteristiske ligningen $r^2 + pr + q = 0$.

(i) Dersom den karakteristiske ligningen har to (forskjellige) reelle røtter r_1 og r_2, er løsningene

$$y = Ce^{r_1 x} + De^{r_2 x}.$$

(ii) Dersom den karakteristiske ligningen bare har én rot r_1, er løsningene

$$y = Ce^{r_1 x} + Dxe^{r_1 x}.$$

(iii) Dersom den karakteristiske ligningen har to komplekse røtter $r_1 = a + ib$ og $r_2 = a - ib$ (der $b \neq 0$), er løsningene

$$y = e^{ax}(C \cos bx + D \sin bx).$$

Gitt tre reelle tall c, d og e vil det i alle tre tilfeller finnes nøyaktig én løsning slik at $y(c) = d$ og $y'(c) = e$.

Inhomogene differensialligninger (10.6)

Ser på

$$* \quad \boxed{y'' + py' + qy = f(x)}$$

$p, q \in \mathbb{R}$

$f(x) \in \mathbb{R}$

$y = y(x)$

Lemma 10.6.1: Anta $y_p = y_p(x)$ er en partikulær løsning av $*$

Da er de andre løsningene på formen

$$y(x) = y_p(x) + y_h(x)$$

der y_h er en løsning av

$$y'' + py' + qy = 0$$

$\square$

Utfordring: Finn y_p!

Ukjente koeffisienters metode

Forsøk Y_p på samme form som høyresiden $f(x)$

Eks 10.6.2 : $y'' + y' - 2y = 2x = f(x)$

Siden $f(x) = 2x$ forsøker vi $Y_p(x) = Ax + B$ for $A, B \in \mathbb{R}$

$$\overset{?}{A} \quad \overset{?}{B}$$

Sette inn i ligningen : $Y_p = Ax + B$

$$Y_p' = A$$

$$Y_p'' = 0$$

$$-2Ax + (A - 2B) = 0 + A - 2(Ax + B) = 2x$$

$$-2A = 2 \Rightarrow A = -1$$

$$A - 2B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow Y_p(x) = -x - \frac{1}{2}$$

Homogen løsning : $r^2 + r - 2 = 0$

$$r_1 = -2 \text{ og } r_2 = 1$$

$$\Rightarrow Y_h(x) = Ce^{-2x} + De^{x}$$

$$\Rightarrow \underline{Y(x) = Y_p(x) + Y_h(x) = -x - \frac{1}{2} + Ce^{-2x} + De^{x}}$$

Generell løsning! (alle ser slik ut)

Moralen: forsøk med Y_p på samme form som $f(x)$

① H.S er et polynom $p(x)$:
prøve med et polynom $Q(x)$ av samme grad.

f.eks. $f(x) = x^2$ forsøk med $Q(x) = Ax^2 + Bx + C$

Fungerer som oftest, men ikke alltid. I såfall kan man prøve $x(Ax^2 + Bx + C)$ eller $x^2(Ax^2 + Bx + C)$

② $Hs. = a^x p(x)$ hvor $a \in \mathbb{R}$ og $p(x)$ er et polynom

Forsøk $a^x Q(x)$ hvor $Q(x)$ er et polynom med samme grad som $p(x)$, evt en eller to grader høyere

③ $Hs = a^x(C\cos bx + D \cdot \sin bx)$ for $C, D, b, a \in \mathbb{R}$

Forsøke $Y_p(x) = a^x(E\cos bx + F\sin bx)$
Hvis dette ikke funker: prøv $xa^x(E\cos bx + F\sin bx)$

Disse kan kombineres:

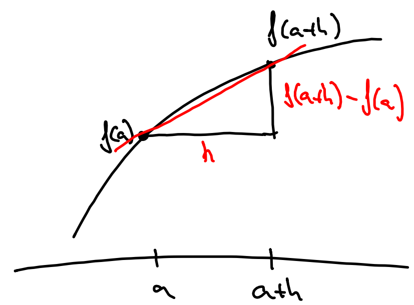
Hvis $y'' + 4y = \underbrace{3x + 2 - \cos x}_{f(x)}$

Forsøke $Y_p(x) = Ax + B + C\cos x + D\sin x$

Feilanalyse numerisk derivasjon (kap 11 i kompendiet)

Husker at $$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Tilnærming $$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \qquad h>0$$



Hvor stor er feilen i denne tilnærmingen?
dvs. hvor stor er

$$f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad ?$$

For å svare kan vi bruke Taylorpolynomer rundt a

$$f(x) = f(a) + (x-a)\,f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(\xi) \qquad \text{hvor } \xi \in (a,x)$$

$$f(a+h) = f(a) + h\, f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(\xi)$$

Stokk om:

$$h\, f'(a) = f(a+h) - f(a) - \frac{h^2}{2} f''(\xi)$$

deler på h og får

$$f'(a) = \underbrace{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}_{\text{Tilnærming}} - \underbrace{\frac{h}{2} f''(\xi)}_{\text{feil}}$$

Trunkeringsfeil

$$\left| f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right| = \frac{h}{2} \left| f''(\xi) \right|$$

Eks $f(x) = \sin x$ $\quad a = 0.5$

h	Feil $\left\| f'(a) - \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right\|$
10^{-1}	$2.5 \cdot 10^{-2}$
10^{-2}	$2.4 \cdot 10^{-3}$
10^{-3}	$2.4 \cdot 10^{-4}$
$\vdots$	
10^{-6}	$2.4 \cdot 10^{-7}$

$$\text{Feil} = \frac{h}{2} \cdot f''(\xi) \approx \frac{h}{2} \cdot f''(a) \approx \underline{h \cdot 0.2397}$$

Stemmer bra!