Forelesning 18.11.2016

Sist: feilananalyse numeriske integrasjon (midtpunktsmetoden)

Idag

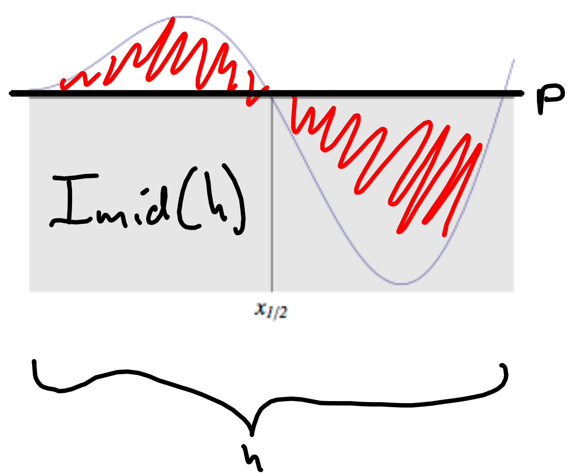
- Generelt om numerisk integrasjon og derivasjon (12 og 11)
- Løsning av ligninger (kap 10 i kompendiet)

Generell metode for numerisk integrasjon

Finn $\int_a^b f(x)\,dx$

1. Deler opp problemet (intervallet $[a,b]$) i biter med lengde h
2. Finner, for hvert intervall, et polynom $p_i \approx f$
3. $\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} p_i\,dx$
4. Summer opp
5. Feilanalyse ved Taylor-polynomer med restledd.

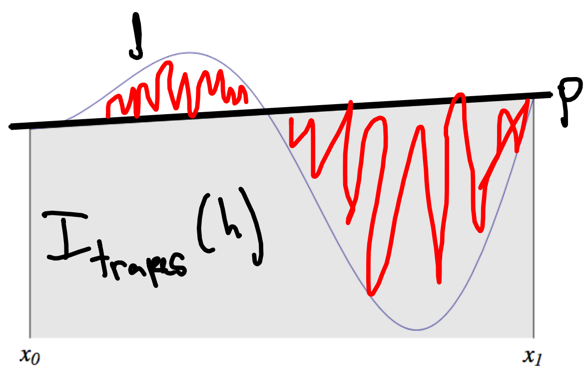
Numerisk integrasjon - noen metoder



Midtpunktsmetoden

$$\left|I - I_{mid}(h)\right| \le \frac{h^2}{24}(b-a)\cdot \max_{z\in[a,b]} \left|f''(z)\right|$$

p er konstant

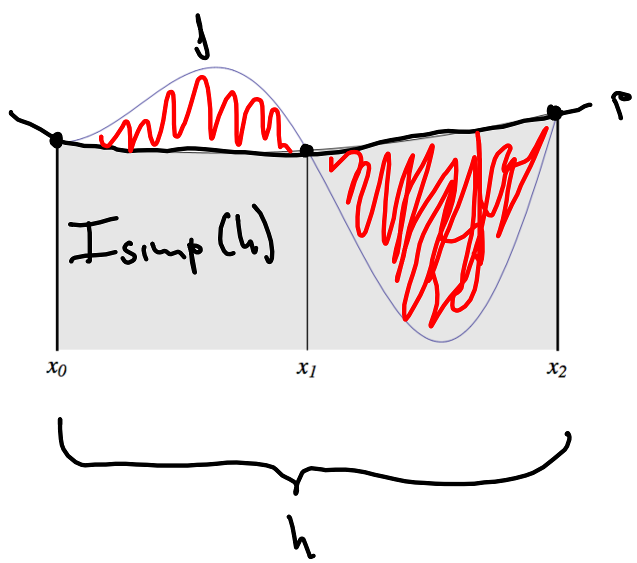


Trapes-metoden

Velger p som lineært polynom s.a.

$p(x_0) = f(x_0)$ og $p(x_1) = f(x_1)$

$$\left|I - I_{trapes}(h)\right| \le \frac{h^2}{12}(b-a)\cdot \max_{z\in[a,b]} \left|f''(z)\right|$$



Simpsons metode

Velger p som kvadratisk polynom s.a.

$p(x_i) = f(x_i)$ for $i = 0, 1, 2$

$$\left|I - I_{simp}(h)\right| \le \frac{h^4}{180}(b-a)\cdot \max_{z\in[a,b]} \left|f''''(z)\right|$$

Generell metode numerisk derivasjon

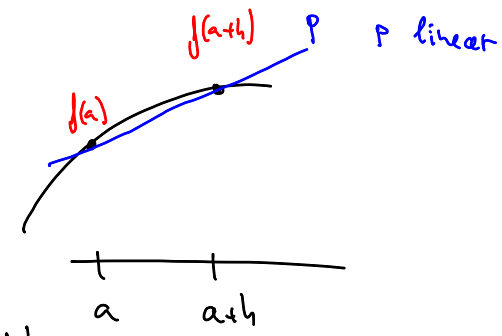
Skal finne $f'(a)$

Generell metode:

1. Finn et polynom $p \approx f$ rundt a
2. Bruk $p'(a) \approx f'(a)$
3. Feilanalyse med Taylor

Eks. Newton kvotient

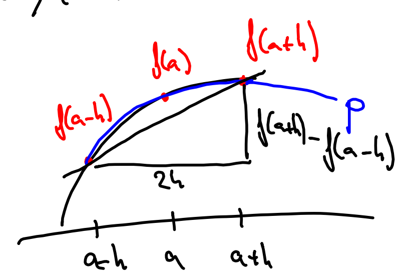
$$p'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$



Trunkeringsfeil $\approx \frac{h}{2}|f''(a)|$

Eks 2 Prøv med kvadratisk polynom p slik at

$$p(a-h) = f(a-h)$$
$$p(a) = f(a)$$
$$p(a+h) = f(a+h)$$



Det finnes kun ett slikt polynom. Dette har

$$\boxed{p'(a) = \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} \approx f'(a)}$$

Kan vise at trunkeringsfeilen tilfredsstiller

$$|f'(a) - p'(a)| \leq \frac{h^2}{6} \cdot \max_{z \in (a-h, a+h)} |f'''(z)|$$

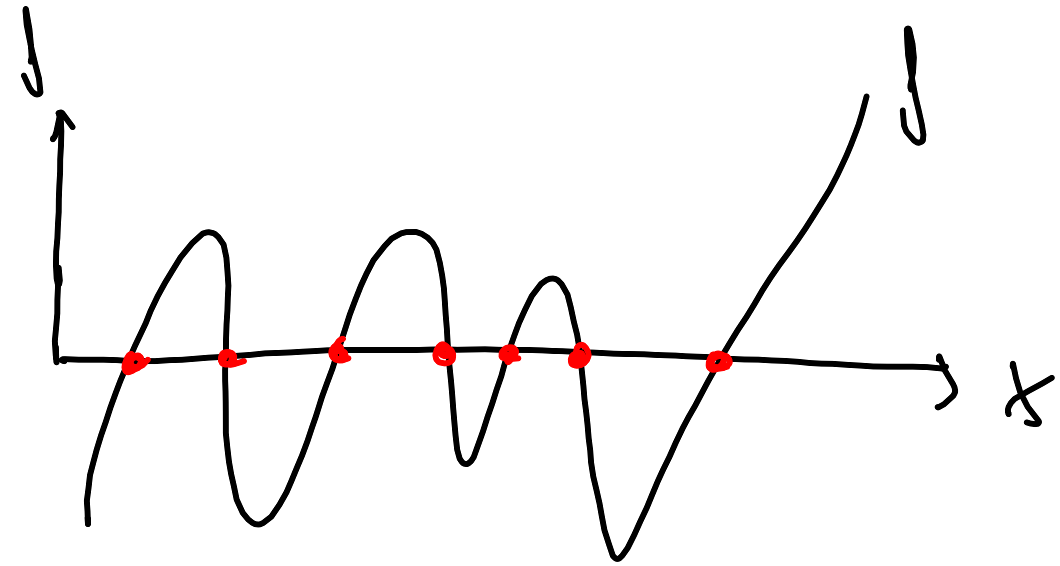
kalles symmetrisk Newton kvotient

Løsning av ligninger (kap 10)

Numerisk løsning av

$$f(x) = 0$$

Dvs finn x s.a. $f(x) = 0$



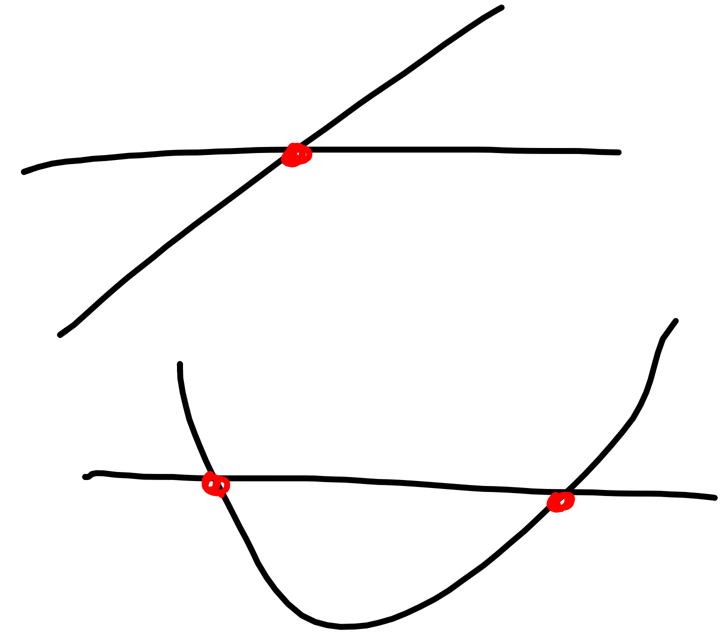
Hvordan ?

① Finn formel / oppskrift
Funker sjelden for ikketrivielle problemer

② Finn numeriske tilnærminger med ønsket nøyaktighet
Funker nesten alltid

<u>Eks</u> Lineær $f(x) = ax + b = 0$

$$\Rightarrow x = -\frac{b}{a}$$

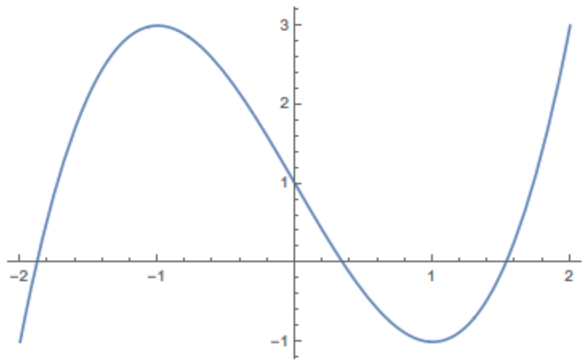


Kvadratisk $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Løsning av x^3-3x+1=0

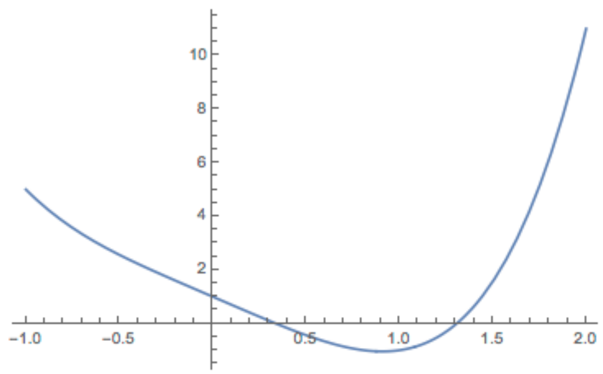
```
Plot[x^3 - 3 x + 1, {x, -2, 2}]
```



$$\frac{-20\sqrt[3]{\frac{3}{-9+\sqrt{12081}}}+\sqrt[3]{2\left(-9+\sqrt{12081}\right)}}{6^{2/3}}.$$

Løsning av x^4-3x+1=0

```
Plot[x^4 - 3 x + 1, {x, -1, 2}]
```

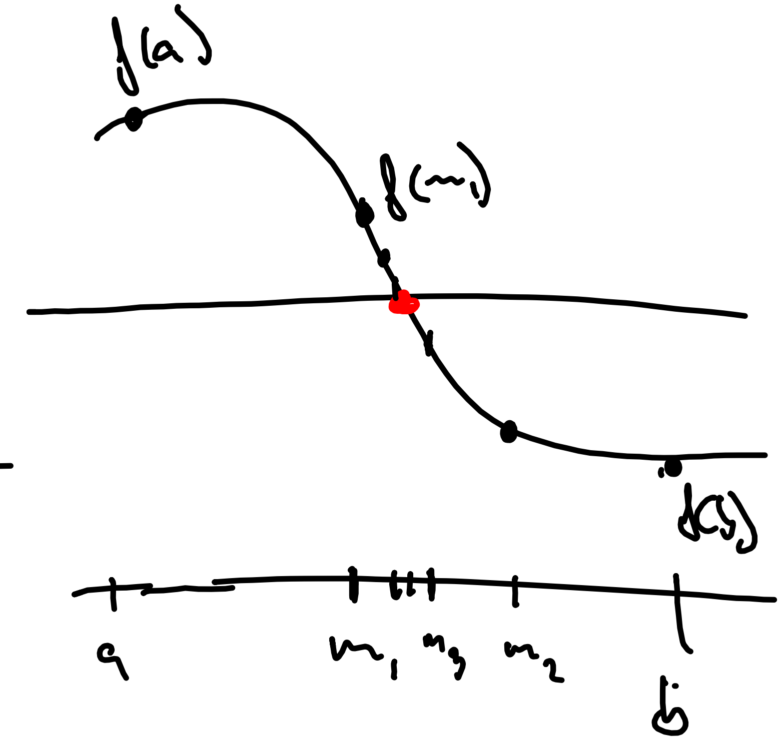


$$\frac{\sqrt{\sqrt[3]{81-\sqrt{5793}}+\sqrt[3]{81+\sqrt{5793}}}}{2\sqrt[6]{2}\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\left(-\sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(81-\sqrt{5793}\right)}-\sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(81+\sqrt{5793}\right)} + \frac{18\sqrt[6]{2}\sqrt[3]{3}}{\sqrt{\sqrt[3]{81-\sqrt{5793}}+\sqrt[3]{81+\sqrt{5793}}}}\right)}$$

N.H. ABEL: Generelt har ikke $p(x) = 0$ løsning ved formel for p av grad ≥ 5

$\Rightarrow$ Må bruke numeriske metoder

Halveringsmetoden (bisection - Kap 10.2)



Thm 10.1: Hvis f er kontinuerlig på $[a,b]$ og

$$f(a)\cdot f(b) < 0$$

så finnes $c \in (a,b)$ slik at

$$f(c) = 0$$

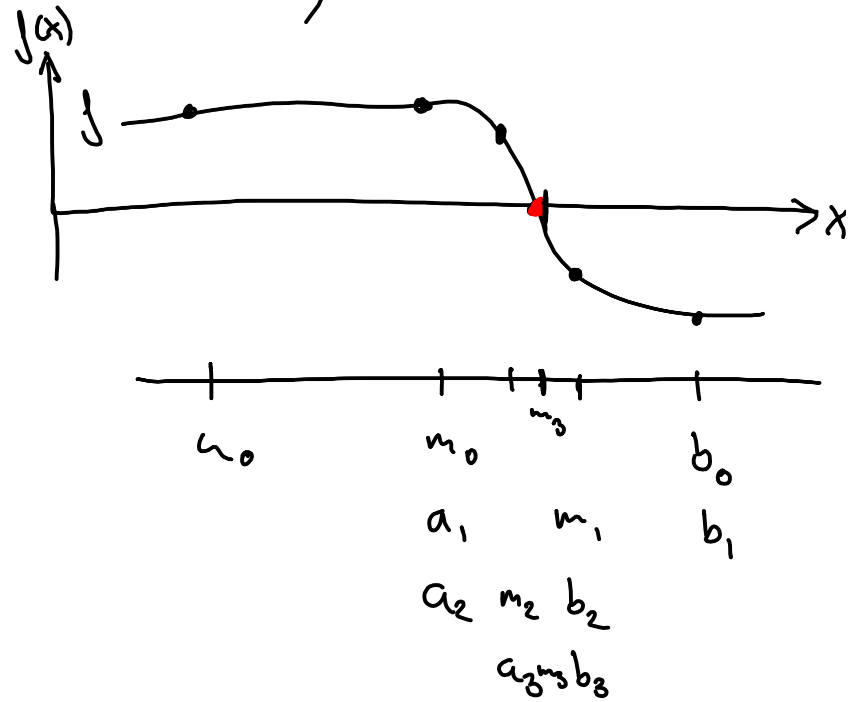
(Løsning av $f(x)=0$)

Halveringsmetoden: Deler $[a,b]$ i to delintervaller $[a,m]$ og $[m,b]$ der $m = \frac{a+b}{2}$ (midtpunktet)

Ett av disse må inneholde en løsning

Kan gjenta til intervallet er lite nok.

Algoritme 10.2 (Halveringsmetoden)



$a_0 = a$ og $b_0 = b$

for $i = 1, \dots, N$

$$m_{i-1} = \frac{a_{i-1} + b_{i-1}}{2}$$

if $f(m_{i-1}) = 0$

løsningen funnet, ferdig!

if $f(a_{i-1}) \cdot f(m_{i-1}) < 0$

$a_i = a_{i-1}$

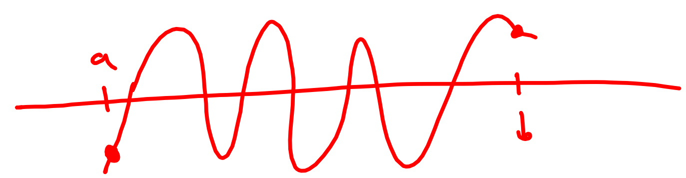
$b_i = m_{i-1}$

else

$a_i = m_{i-1}$

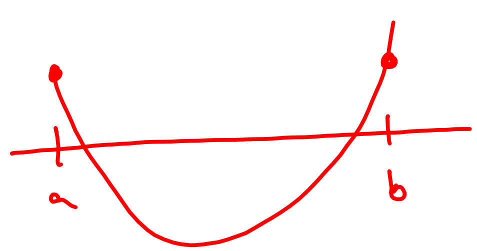
$b_i = b_{i-1}$

Metoden er bortimot idiotsikker,
Men hva om det er flere løsninger i $[a,b]$?



Vet ikke hvilken løsning metoden finner!

Hva skjer i dette tilfellet?



Absoluttfeilen i første steg

$$|c-m_0| \le \frac{b-a}{2}$$

Etter i steg

$$|c-m_i| \le \frac{b-a}{2^{i+1}}$$

Hva med relativ feil?

$$\frac{|c-m_i|}{|c|} \le \frac{b-a}{2^{i+1}\,|c|} \approx \frac{b-a}{2^{i+1}\,|m_i|}$$

Kan kjøre metoden som følger:

while $\left(\frac{b-a}{2^{i+1}|m_i|} > 10^{-10}\right)$

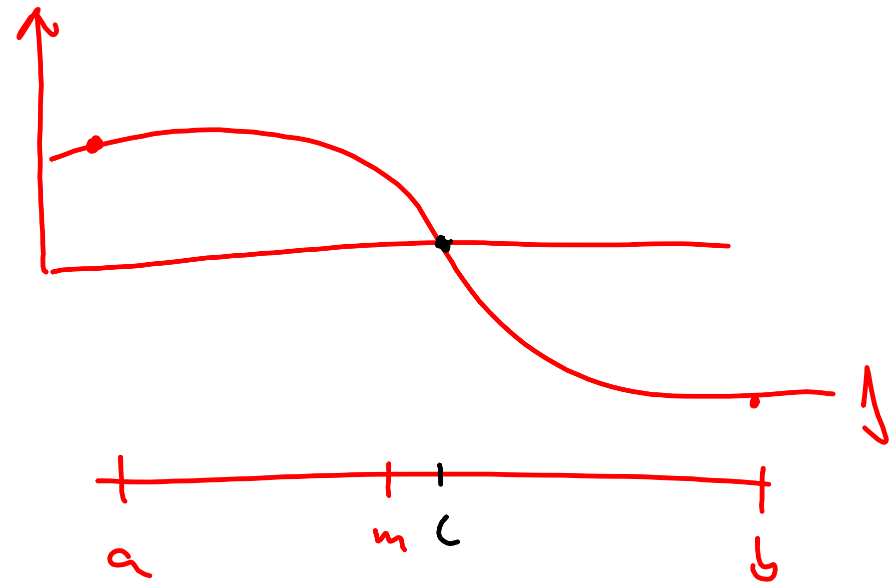
halver intervallet osv.

NB: hvis $m_i \simeq 0$ får vi problemer

Bør isteden bruke

while $\left((b-a) > 10^{-10}\cdot|m_i|\cdot 2^{i+1}\right)$

halver intervall ...



Kan vise at antall korrekte bits i m_i øker med 1 per iterasjon

$\Rightarrow$ Full nøyaktighet etter

$N = 24$ iterasjoner med 32 bits flyttall

$N = 54$ — " — 64 — " —

Hvis vi kaller feilen

$$|e_i| = |c - m_i|$$

har vi at

$$|e_{i+1}| \leq k \cdot e_i^r$$

hvor $r = 1$. Siden $r = 1$ sier vi at metoden har <u>lineær konvergens</u>