Første ordens differensialligninger.

Vi ser på ligninger på formen

$\boxed{x' = f(t, x),}$ $x(a) = x_0$

$x'(t) = f(t, x(t))$ Startverdi

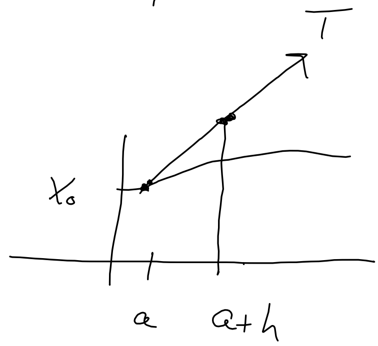
"Naturlov" spesifiserer til en konkret situasjon.

Vi kan ha mange ulike startverdier for den samme differensialligningen.
Dette betyr at vi har familier av løsninger.

Eulers metode $\quad x' = \sin(x+t)$

Når vi har ligningen $\boxed{x' = f(t,x)}$ og $x(a) = x_0$ kan vi finne tangenten til løsningen $x(t)$ i a:

$$T(t) = \overset{x_0}{x(a)} + (t-a)\,\overset{?}{x'(a)}$$



$$x'(a) = f(a, x(a)) = f(a, x_0)$$

Altså er

$$T(t) = x_0 + (t-a) f(a, x_0)$$

Vi bruker $T(a+h)$ som en tilnærming til løsningen $x(a+h)$.

$$x_1 = T(a+h) = x_0 + h f(a, x_0) \approx x(a+h)$$

Bruk samme strategi for å $(a+h, x_1)$ til $(a+2h, x_2)$

Eulers metode:

$$\boxed{\left.\begin{aligned} x_{k+1} &= x_k + h f(t_k, x_k) \\ t_{k+1} &= a + (k+1)h \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, 2, \ldots}$$

Vi genererer $(t_0, x_0), (t_1, x_1), (t_2, x_2) \ldots$

der x_k er en tilnærming til $x(t_k) = x(a+kh)$

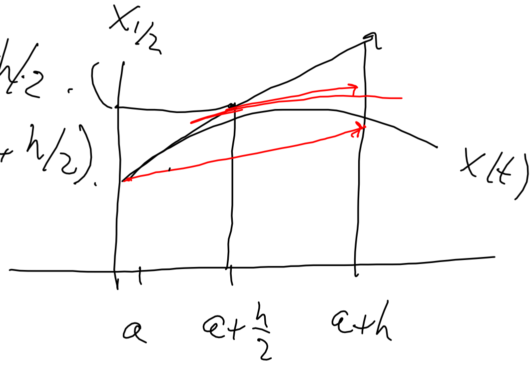
Eulers midtpunktmetode

Bruk Euler fra a til a+h/2.

Regn ut ny derivert i (a+h/2).

Trekk denne tilbake til a

og følg den til a+h.



Formel:

$$\left.\begin{aligned} x_{k+1/2} &= x_k + \frac{h}{2} f(t_k, x_k) \\ x_{k+1} &= x_k + h\, f(t_k + h/2,\ x_{k+1/2}) \\ t_{k+1} &= a + (k+1)h \end{aligned}\right\} \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

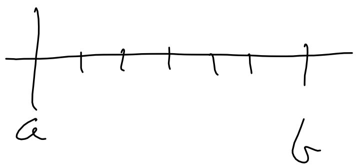
Feilen i Euler og Euler midtpkt.

1. I Eulers metode regner vi ut en sekvens av tilnærminger til $x(t)$,

$$(a, x_0),\ (a+h, x_1),\ (a+2h, x_2),\ \ldots,\ (b, x_n)$$

Feilen er begrenset ved

$$\boxed{|x_k - x(t_k)| \leq C_1 \cdot h}$$



der C er uavhengig av h.

2. Euler midtpkt:

$$(a, \hat{x}_0),\ (a+h, \hat{x}_1),\ (a+2h, \hat{x}_2)\ \ldots,\ (b, \hat{x}_n)$$

$$\boxed{|\hat{x}_k - x(t_k)| \leq C_2 \cdot h^2}$$ der C_2 er uavh. av h.

Systemer av ligninger (13.5)

I fysikk får vi som regel en ligning langs hver akse når vi modellerer kast:

Langs x-aksen: $v_1' = -\frac{c}{m} v_1^2$, v_1 - hastighet horisontalt

Langs y-aksen: $v_2' = \frac{c}{m} v_2^2 - g$, v_2 - vertikal hastighet.

$$v_1' = -\frac{c}{m} v_1^2, \quad v_1(0) = v_{0x}$$

$$v_2' = \frac{c}{m} v_2^2 - g, \quad v_2(0) = v_{0y}$$

$$\bar{v} = (v_1, v_2), \quad \bar{f}(t, \bar{v}) = (f_1(t, \bar{v}), f_2(t, \bar{v}))$$

$$f_1(t, \bar{v}) = f_1(t, (v_1, v_2)) = -\frac{c}{m} v_1^2$$

$$f_2(t, \bar{v}) = \quad - - - \quad = \frac{c}{m} v_2^2 - g$$

Kan skrive alt som

$$\bar{v}' = \bar{f}(t, \bar{v})$$

Euler for system.

$$\bar{v}_{k+1} = \bar{v}_k + h \bar{f}(t_k, \bar{v}_k)$$