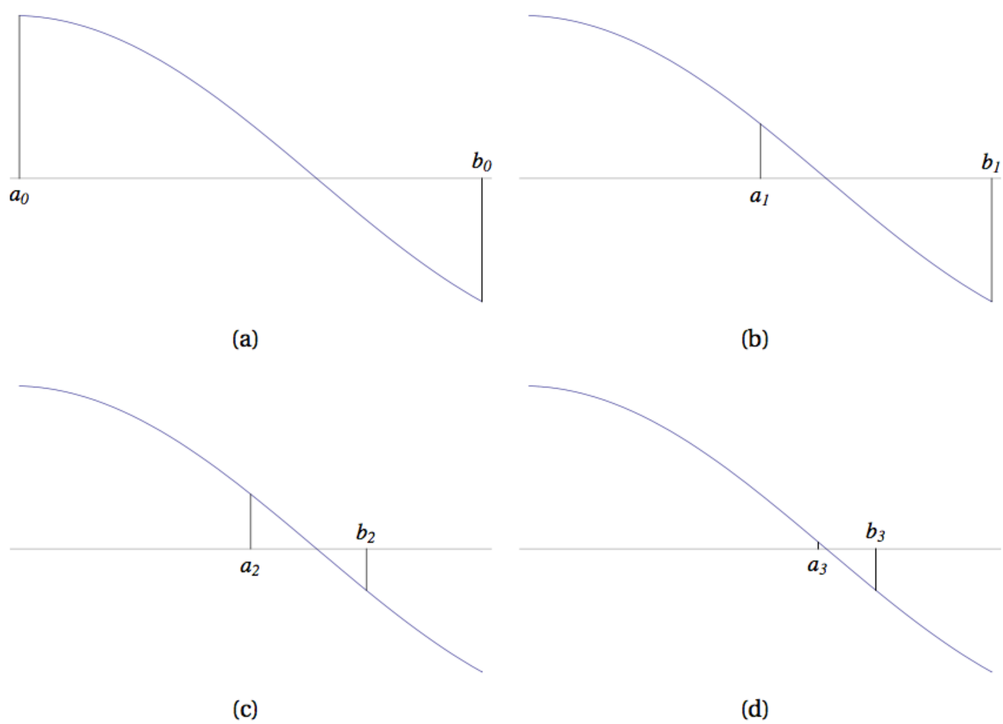
Forelesning 23.11.2016

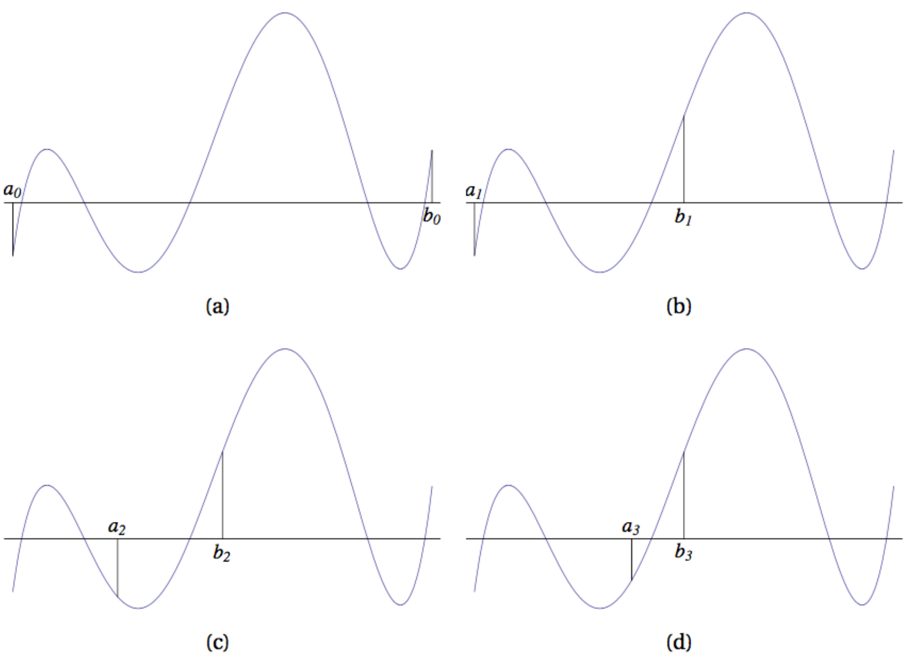
Sist: Løsning av ligninger (halverings-metoden 10.2)

Idag
- Løsning av ligninger (kap 10.3-10.4 i kompendiet)

Midtpunktsmetoden (10.2)



Midtpunktsmetoden (10.2)

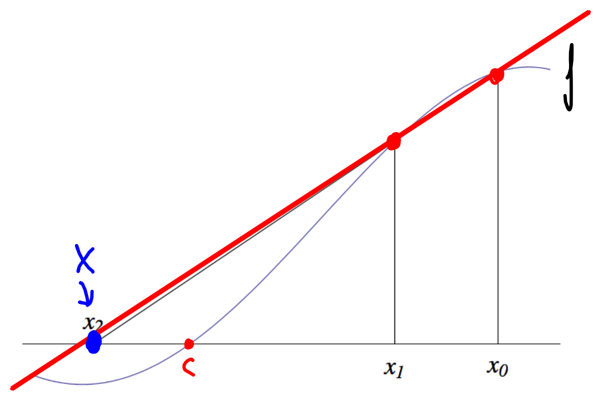


Sekantmetoden (10.3)

Gitt f og to tilnærminger x_0 og x_1

1. Finn lineært polynom $S(x)$ som interpolerer f i x_0 og x_1

2. Løs $S(x) = 0$. Løsningen er da en tilnærming til løsning av $f(x) = 0$



Gjentas til man er nær nok løsning av $f(x) = 0$

Detaljer: kan skrive $S(x)$ på formen

$$S(x) = f(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x_1 - x)$$

Sjekk:
$S(x_0) = f(x_0)$ ✓
$S(x_1) = f(x_1)$ ✓

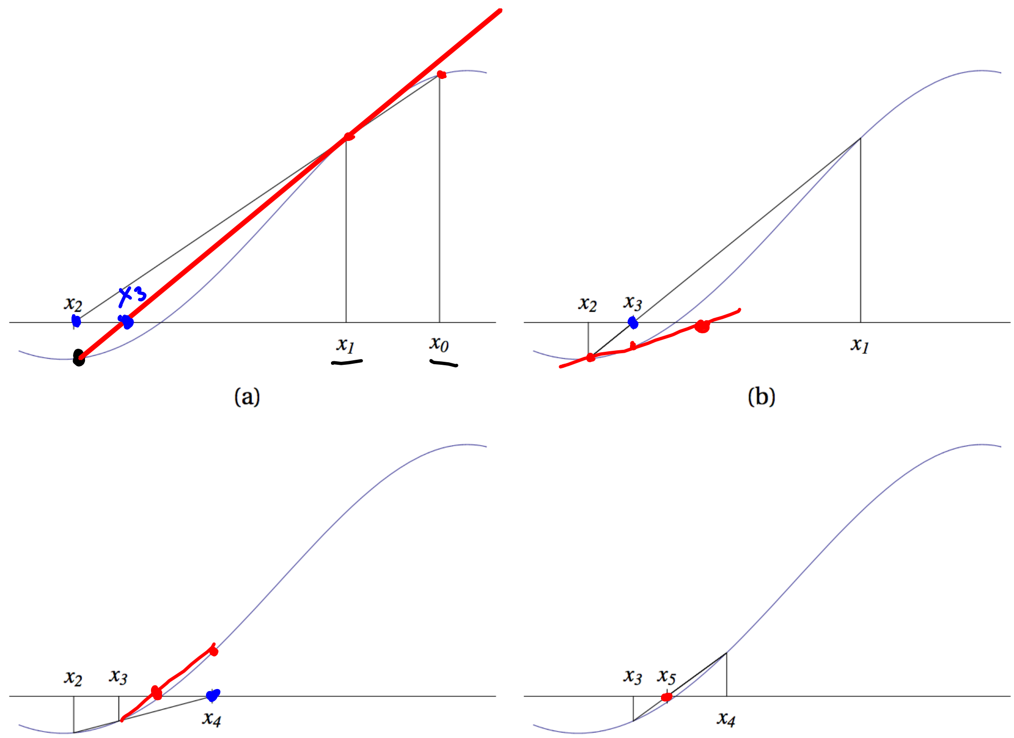
krever at $S(x) = 0$. Løsningen er

$$x = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} \cdot f(x_1)$$

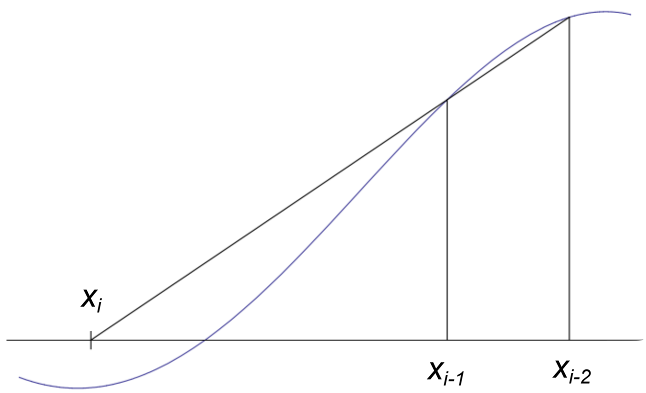
Håper da at $x_2 = x$ er en bedre tilnærming til løsningen

Gjenta for x_2 og x_1, for å få x_3 osv.

Sekantmetoden (10.3)



Sekantmetoden - algoritme



Algorithm 10.11 (Basic Secant method). *Let f be a continuous function and let x_0 and x_1 be two given numbers in its domain. The sequence $\{x_i\}_{i=0}^N$ given by*

$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})} f(x_{i-1}), \quad i = 2, 3, \ldots, N, \tag{10.6}$$

will in certain situations converge to a zero of f.

Når skal vi stoppe? Stopp når relativ feil er „liten nok"

Relativ feil $\frac{|x_i - c|}{|c|} \approx \frac{|x_i - c|}{|x_i|} \approx \frac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|}$

Kan stoppe når denne er $< \varepsilon$ (lite tall, f.eks. 10^{-10})

For å unngå problemer med $x_i \approx 0$ kan vi bruke

$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon |x_i|$$

Sekantmetoden - feil og konvergens

Definerer absolutt feil som $e_i = c - x_i$

Dersom følgen $x_2, x_3, \dots$ konvergerer til en $c \in \mathbb{R}$
og $f'(c) \neq 0$ så kan vi vise at

$$|e_i| \leq k \cdot |e_{i-1}|^r$$

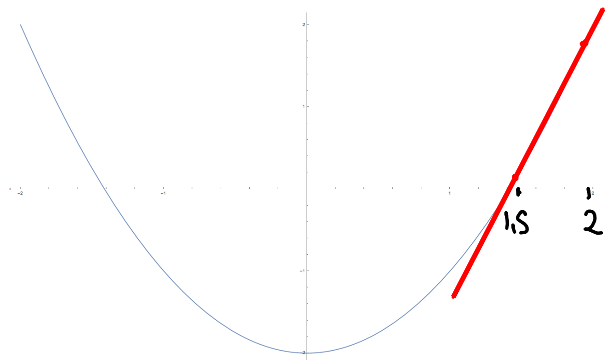
hvor k er en konstant > 0
og $r = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618\dots$

Sier at metoden konvergerer med orden $1.618\dots$
Betyr at antall korrekte siffer øker med $61,8\dots\%$ i hver iterasjon

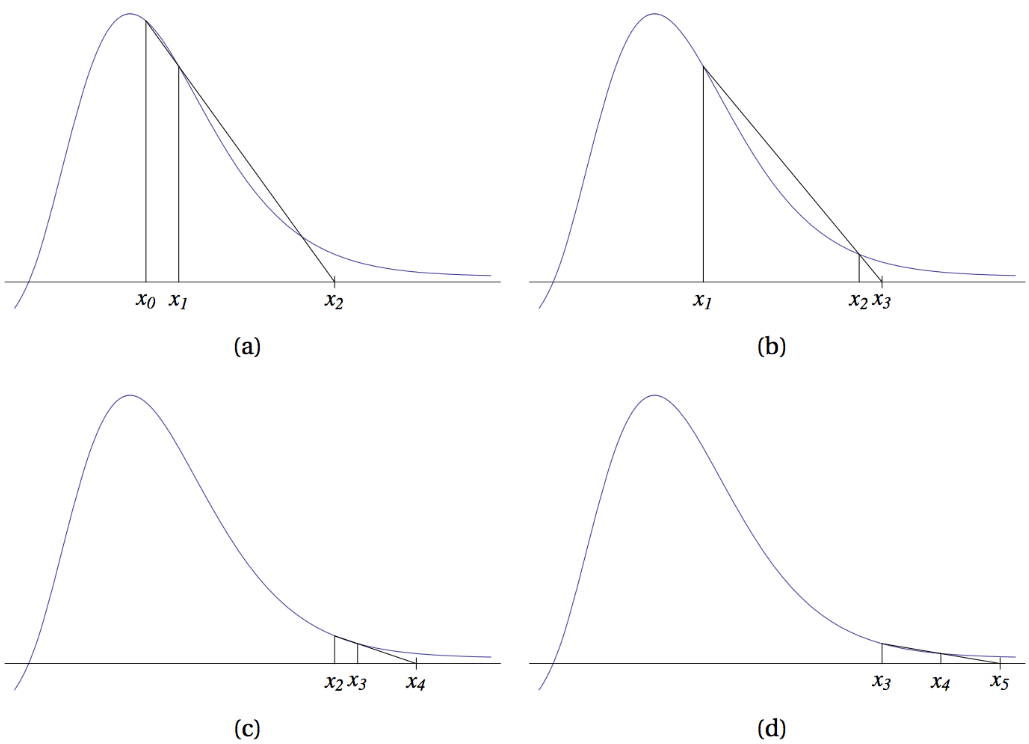
Sekantmetoden - eksempel

Finn x slik at $f(x) = x^2 - 2 = 0$, startverdier $x_0=2$ og $x_1=1.5$

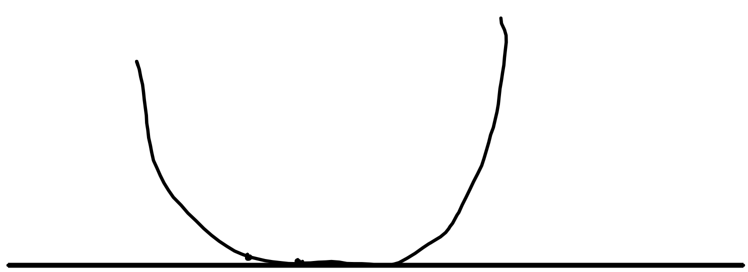
$$x_2 \approx 1.42857142857142857, \quad e_2 \approx 1.4 \times 10^{-2},$$
$$x_3 \approx 1.41463414634146341, \quad e_3 \approx 4.2 \times 10^{-4},$$
$$x_4 \approx 1.41421568627450980, \quad e_4 \approx 2.1 \times 10^{-6},$$
$$x_5 \approx 1.41421356268886964, \quad e_5 \approx 3.2 \times 10^{-10},$$
$$x_6 \approx 1.41421356237309529, \quad e_6 \approx 2.4 \times 10^{-16}.$$



Sekantmetoden - kan feile



Hva skjer hvis $f'(c) = 0$? Linear konvergens

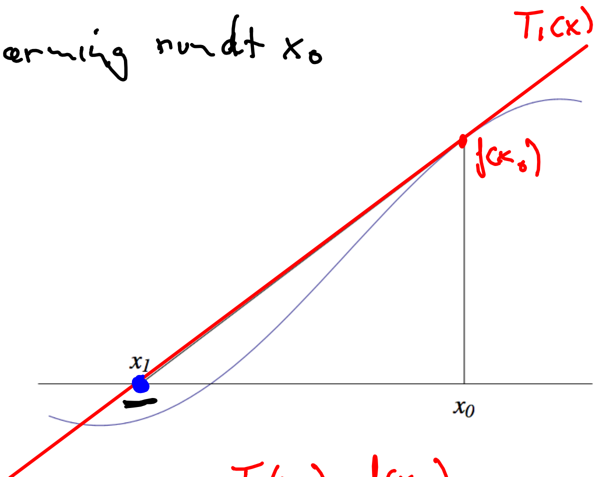


Newtons metode (10.4)

Gitt f og en startverdi x_0

(1) Finn Taylor 1. ordens tilnærming rundt x_0
kaller $T_1(x)$

(2) Løs $T_1(x) = 0$
Da er løsningen x_1 en ny
tilnærming til løsning av
$f(x) = 0$



Gjenta for $x_2, x_3, \dots$

$T_1(x_0) = f(x_0)$
$T_1'(x_0) = f'(x_0)$

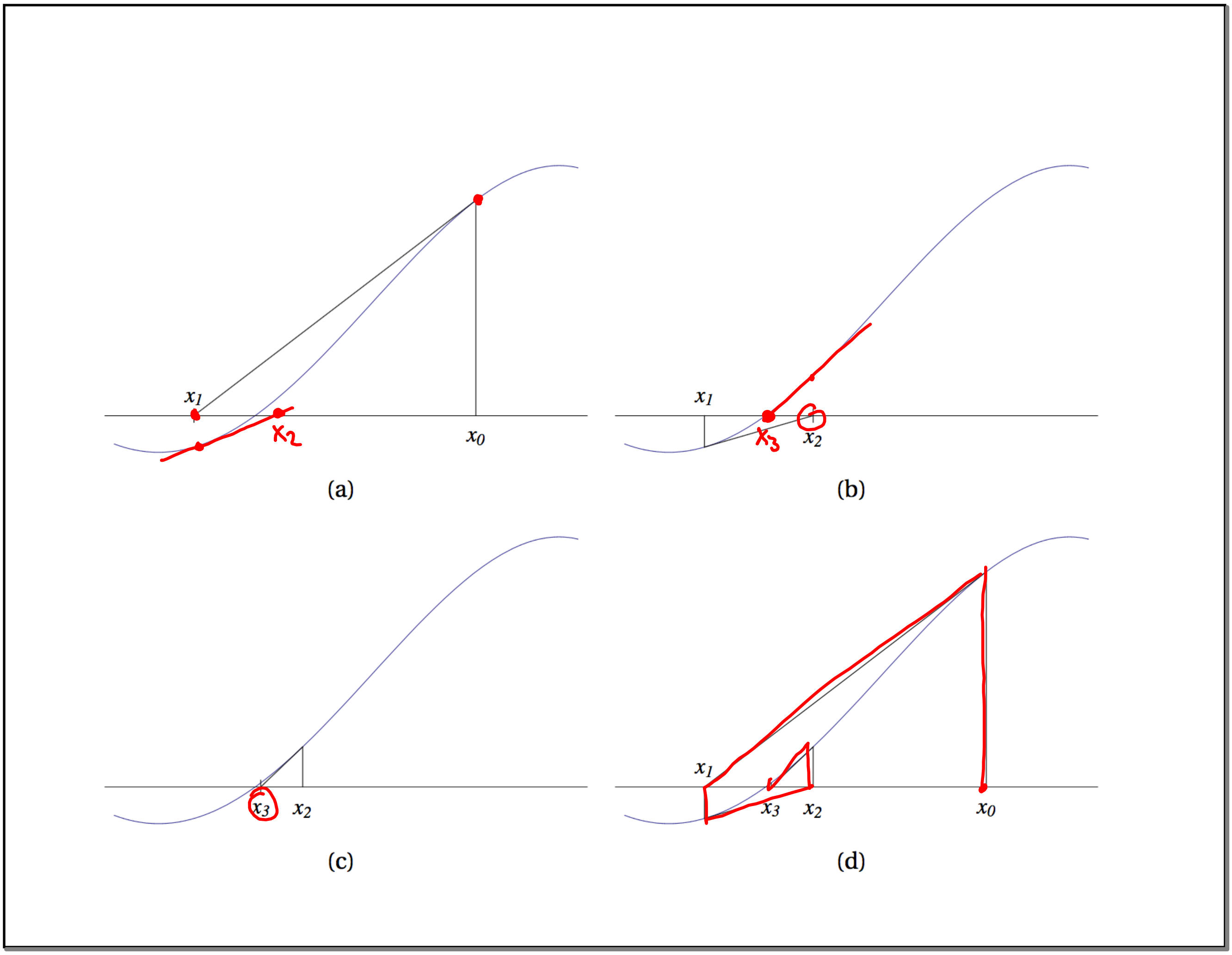
Detaljer: $T_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$ (Tangenten)
Løser for $T_1(x) = 0$ og får

$$f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}}$$

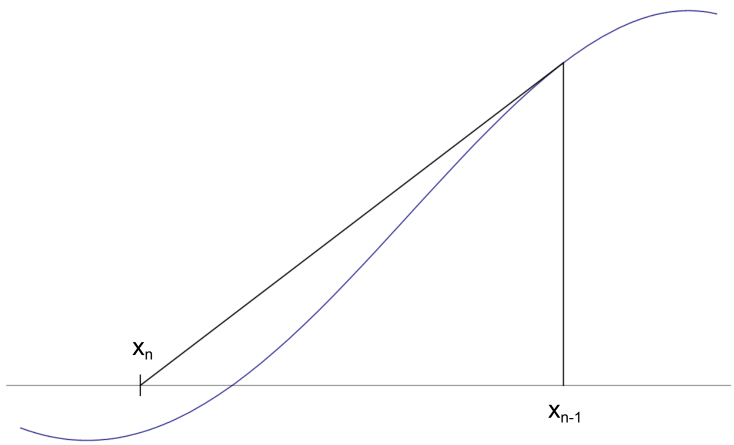
Nullpunktet til Tangenten $T_1(x)$

Bruker $x_1 = x$ som ny startverdi og gjentar til vi er fornøyd



x_1
x_2
x_0
(a)
x_1
x_3
x_2
(b)
x_3
x_2
(c)
x_1
x_3
x_2
x_0
(d)

Newtons metode - algoritme



$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Vi håper følgen $x_1, x_2, x_3, \dots$ konvergerer til en c slik at $f(c) = 0$

Når skal vi stoppe? Relativ feil $\approx \dfrac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|}$

Et vanlig/rimelig $|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon \cdot |x_i|$ for vår toleranse $\varepsilon > 0$ (et lite tall, f.eks 10^{-8})

Newtons metode - konvergens

Theorem 10.20. *Suppose that f and its first two derivatives are continuous in an interval I that contains a zero c of f, and suppose that there exists a positive constant γ such that $|f'(x)| > \gamma > 0$ for all x in I. Then there exists a constant K such that for all initial values x_0 sufficiently close to c, the sequence produced by Newton's method will converge to c and the error $e_n = x_n - c$ will satisfy*

$$|e_{n+1}| \leq K|e_n|^2, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{10.12}$$

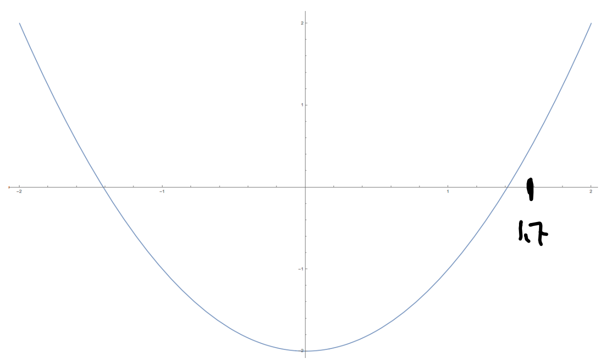
where K is some nonzero constant.

Sier at metoden konvergerer med orden 2 (kvadratisk konvergens)
Antall riktige siffer fordobles i hver iterasjon.

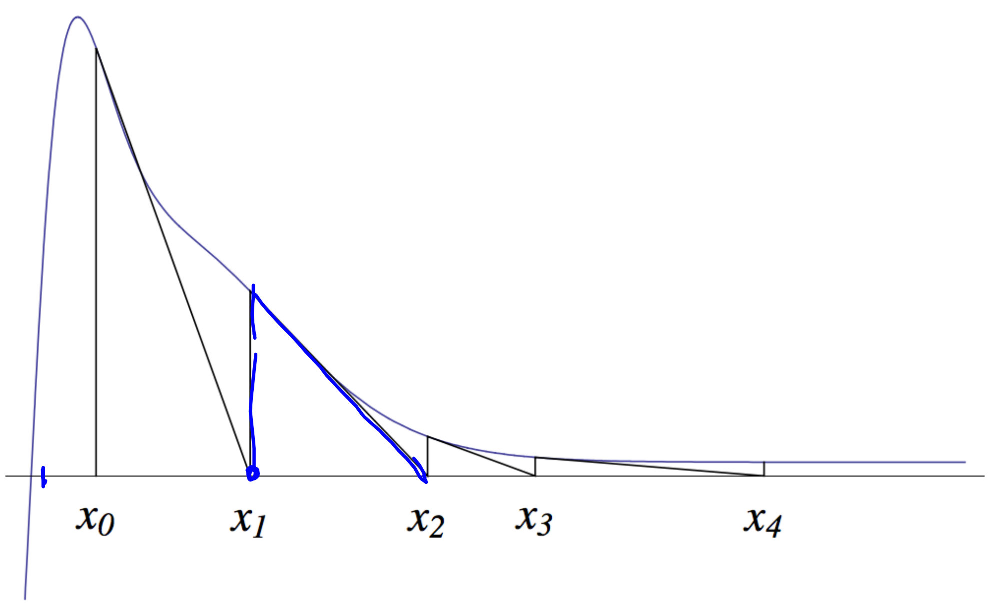
Newtons metode - eksempel

Finn x slik at $f(x) = x^2 - 2 = 0$, startverdi x_0=1.7

$$
\begin{aligned}
x_1 &\approx 1.43823529411764706, & e_2 &\approx 2.3 \times 10^{-1},\\
x_2 &\approx 1.41441417057620594, & e_3 &\approx 2.4 \times 10^{-2},\\
x_3 &\approx 1.41421357659935635, & e_4 &\approx 2.0 \times 10^{-4},\\
x_4 &\approx 1.41421356237309512, & e_5 &\approx 1.4 \times 10^{-8},\\
x_5 &\approx 1.41421356237309505, & e_6 &\approx 7.2 \times 10^{-17}.
\end{aligned}
$$



Kan feile for uheldige startverdier



Lineær konvergens hvis $f'(c) = 0$