Differensligninger.

Eks. Smittsom sykdom.

Av de som er syke en uke vil 25 % også være syke neste uke. Inkubasjonstiden er to uker. En som var syk for to uker siden vil i snitt ha smittet 3/4 personer denne uken. Finn en differensligning som beskriver utviklingen i antall syke.

La x_n være antall syke i uke n.

$$x_n = \frac{1}{4} x_{n-1} + \frac{3}{4} x_{n-2} - 90$$

Vi ser på ligninger av typen

$$(\#) \quad x_{n+2} + b\,x_{n+1} + c\,x_n = 0 \quad , \quad b, c \in \mathbb{R}$$

Prøv med løsning på formen $x_n = r^n$, $r \in \mathbb{R}$

Da må r tilfredstille

$$r^2 + br + c = 0 \quad , \quad \text{karakteristisk ligning}$$

Tre tilfeller

i) To reelle røtter r_1 og r_2, $r_1 \neq r_2$

Da er $x_n = C \cdot r_1^n + D \cdot r_2^n$, $C, D \in \mathbb{R}$

den generelle løsningen til $(\#)$.

ii) En reell rot r. Da er den generelle løsningen $x_n = C \cdot r^n + D \cdot n \cdot r^n$, $C, D \in \mathbb{R}$.

Ex. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$, $x_0 = 1$, $x_1 = 8$

Kar. lign. $r^2 - 4r + 4 = 0$, $r = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$

Generell løsning $x_n = C \cdot 2^n + D \cdot n \cdot 2^n$

$1 = x_0 = C + D \cdot 0 \Rightarrow C = 1$

$8 = x_1 = C \cdot 2 + D \cdot 1 \cdot 2 = 2C + 2D$, $2D = 8 - 2C = 6$

$D = 3$

Endelig løsning

$$x_n = 2^n + 3n \cdot 2^n = 2^n(1 + 3n)$$

iii) To kompleks konjugerte løsninger r og $\bar{r}$.

Da er den generelle løsningen

$$x_n = C r^n + D \bar{r}^n$$

Hvis $D = \bar{C}$ så blir x_n reell.

Differenslign

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$$

$$x_{n+2} = -b x_{n+1} - c x_n$$

$b, c \in \mathbb{R}$.

$$x_n = C \cdot r^n + \bar{C} \bar{r}^n$$

$$\bar{x}_n = \overline{C r^n + \bar{C} \bar{r}^n} = \bar{C} \bar{r}^n + C r^n$$

<u>Detalj sjekk.</u> Anta at $r = \rho e^{i\theta}$, $\bar{r} = \rho e^{-i\theta}$ og at $C = A + iB$, $\bar{C} = A - iB$

$$x_n = C \cdot r^n + \bar{C} \cdot \bar{r}^n$$

$$= (A + iB)(\rho e^{i\theta})^n + (A - iB)(\rho e^{-i\theta})^n$$

$$= (A + iB) \rho^n e^{in\theta} + (A - iB) \rho^n e^{-in\theta}$$

$$= (A + iB) \rho^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) + (A - iB) \rho^n (\cos n\theta - i \sin n\theta)$$

$$= \rho^n (2A \cos n\theta + 2i^2 B \sin n\theta)$$

$$= \rho^n (2A \cos n\theta - 2B \sin n\theta)$$

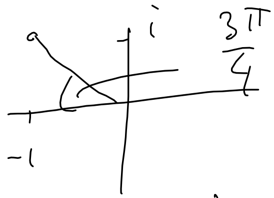
$$= \rho^n (E \cos n\theta + F \sin n\theta)$$

Eks $\quad x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0, \quad x_0 = 1, \quad x_1 = 2$

Kar. lign. $\quad r^2 + 2r + 2 = 0$

$$r = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm i$$

$r = -1 + i$, $\quad r$ på polarform $\quad \theta$



$$|r| = \sqrt{2}, \quad r = \sqrt{2}\, e^{i\,3\pi/4}$$

$$x_n = \rho^n (E \cos n\theta + F \sin n\theta)$$
$$= (\sqrt{2})^n \left(E \cos n\frac{3\pi}{4} + F \sin n \frac{3\pi}{4}\right)$$

Startverdier:

$$1 = x_0 = 1 \cdot (E \cdot 1 + F \cdot 0) \Rightarrow E = 1$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$2 = x_1 = \sqrt{2}\left(E \cos \frac{3\pi}{4} + F \sin \frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(1 \cdot \left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) + F \tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) = -1 + F$$
$$2 = -1 + F, \quad F = 3$$

Endelig løsning

$$x_n = (\sqrt{2})^n \left(\cos n\frac{3\pi}{4} + 3 \sin n \frac{3\pi}{4}\right)$$
$$= 2^{n/2}\left(\cos n\frac{3\pi}{4} + 3 \sin n\frac{3\pi}{4}\right)$$

Inhomogene differensligninger. 4.2 i Kalkulus

Lemma Anta at x_n^p er en løsning av den inhomogene ligningen

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = f(n).$$

Da er de andre løsningene på formen

$$x_n = x_n^p + x_n^h$$

der x_n^h er en vilkårlig løsning av den homogene ligningen

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$$

Ex. $x_{n+2} - x_{n+1} - 6 x_n = -6n + 1$

Hvordan finne én løsning?

Prøv med en løsning på samme form som høyresiden dvs. $x_n^p = An + B$, $A, B \in \mathbb{R}$

Vi setter inn:, $x_{n+2}^p = A(n+2) + B = An + 2A + B$

$x_{n+1}^p = A(n+1) + B = An + A + B$

$x_{n+2}^p - x_{n+1}^p - 6 x_n^p$

$= An + 2A + B - (An + A + B) - 6(An + B)$

$= -6An + (A - 6B)$

Dette må stemme med høyresiden $-6n+1$

$-6An + (A - 6B) = -6n + 1$ for alle n.

Da må

$-6A = -6$, $A - 6B = 1$

Da må $A = 1$, $B = 0$

så $x_n^p = n$

Løsning av homogen ligning.

$$x_{n+2} - x_{n+1} - 6 x_n = 0$$

Vi får $x_n^h = C(-2)^n + D3^n$

Generell løsning av inhomogen ligning:

$$x_n = x_n^p + x_n^h = n + C(-2)^n + D3^n$$