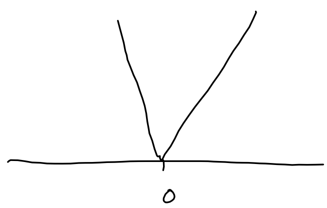
Taylorpolynomer.

Gitt funksjon f og a, så er Taylor-polynomet til f om a gitt ved

$$T_n f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$$

$f(x) = |x|$



Feilleddet.

$$f(x) = T_n f(x) + R_n f(x)$$

$$R_n f(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)\,(x-t)^n\,dt$$

Kommer fra $\quad f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$

Deretter delvis integrasjon n ganger

Eks $\quad f(x) = \ln x, \quad f'(x) = x^{-1}$

$$f''(x) = -x^{-2}, \quad f'''(x) = 2x^{-3}, \quad f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!\,x^{-n}$$

Alternativ form for $R_n f(x)$:

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a) + \frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)$$

$$c \in (a, x)$$

Ex. Finn en formel for en tilnærming til e som kan beregnes med aritmetikk $(+, -, *, /)$ og feil $< 10^{-3}$.

Husk at hvis $f(x) = e^x$, $a = 0$

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$e = e^1 \approx T_n(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

Hvor stor må n være for at feilen skal bli mindre enn 10^{-3}?

Formel for feilleddet

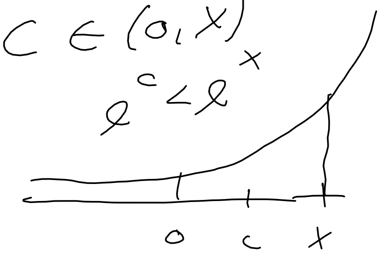
$$R_n f(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\,(x-a)^{n+1}, \quad c \in (a, x)$$

Her er $f(x) = e^x$, $a = 0$. Vi er interessert i feilen for $x = 1$.

Dermed er

$$R_n f(x) = \frac{1}{(n+1)!} e^c\, x^{n+1}, \quad c \in (0, x)$$

$e^c < e^x$



$$|R_n f(x)| = \frac{1}{(n+1)!} e^c\, x^{n+1}$$

$$\leq \frac{1}{(n+1)!} e^x \cdot x^{n+1}$$

$x = 1$

$$|R_n f(1)| \leq \frac{1}{(n+1)!} e^1 \cdot 1^{n+1} = \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-3}$$

Vi ønsker feil $\leq 10^{-3}$. Det får vi til om vi velger den minste n slik at

$$\frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-3}$$

Med andre ord $(n+1)! \geq 3000$

Siden $6! = 720$ og $7! = 5040$ ser vi at $n+1 = 7$, $n = 6$.

Det betyr $1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720}$ tilnærme e med feil mindre enn 10^{-3}.