Systemer av differensialligninger

Eks.

$$x' = xy + \cos z, \quad x(0) = x_0$$
$$y' = 2 - t^2 + z^2 y, \quad y(0) = y_0$$
$$z' = \sin t - x + y, \quad z(0) = z_0$$

$x(t), y(t), z(t)$ – ukjente funksjoner.

Innfører $\bar{x} = (x, y, z)$, $\bar{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

$$\bar{f}(t, \bar{x}) = (f_1(t, \bar{x}), f_2(t, \bar{x}), f_3(t, \bar{x}))$$

$$f_1(t, \bar{x}) = xy + \cos z, \quad f_2(t, \bar{x}) = 2 - t^2 + z^2 y$$
$$f_3(t, \bar{x}) = \sin t - x + y$$

Da kan vi skrive ligningene som

$$\boxed{\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x})}, \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0$$

$$(x', y', z') = (f_1(t, x, y, z), f_2(t, x, y, z), f_3(t, x, y, z))$$

Euler for systemer:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + h \bar{f}(t_k, \bar{x}_k)$$

Høyere ordens ligninger som system av 1. ordens ligninger

Hvordan kan vi løse

(#) $x'' = t^2 + \sin(x + x')$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

Vi kan bruke Euler for systemer!

Vi innfører funksjonen $\boxed{x_2 = x'}$. Da er $x_2' = x''$

så (#) blir til $\boxed{x_2' = t^2 + \sin(x + x_2)}$, $x(0) = 1$, $x_2(0) = 0$

La oss også sette $x_1 = x$. Vi får da

$$\boxed{\begin{aligned} x_1' &= x_2, & x_1(0) &= 1 \\ x_2' &= t^2 + \sin(x_1 + x_2), & x_2(0) &= 0 \end{aligned}}$$

$\bar{x}' = f(t, \bar{x})$, $\bar{x}(0) = (1, 0)$.

Separable differensialligninger

(10.4 i Kalkulus)

En førsteordens differensialligning kalles separabel hvis den kan skrives

$$q(y) \cdot y' = p(x) \quad , \quad \text{der } y(x) \text{ er den ukjente.}$$

$$y' = p(x)/q(y) \quad (= f(x,y))$$

Ex. $e^{-x} y' = 1 + y^2$

Kan skrives $\frac{y'}{1+y^2} = e^x \iff \frac{y'(x)}{1+y(x)^2} = e^x$

Integrer m.h.p. x på begge sider:

$$\int \frac{y'(x)}{1+y(x)^2}\,dx = \int e^x\,dx = e^x + C$$

Sett $u = y(x)$, $du = y'(x)\,dx$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u = \arctan y(x)$$

$$\arctan y(x) = e^x + C$$

tan på begge sider:

$$y(x) = \tan(e^x + C)$$

Generelt

$$\int p(y)\,y' = \int q(x) \quad \text{- kan gå galt!}$$

Til slutt: løse m.h.p. y - kan gå galt.