MAT-INF 1100 24/8 - 2016

TEMA: NOTASJON, TALL OG SUMMER

TALL OG MENGDER

$\mathbb{N}$ - naturlige tallene . $\{1, 2, 3, \dots\}$

$\mathbb{Z}$ - hele tall $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Sier at a er delelig med b $\iff$ $a = q \cdot b$ $q \in \mathbb{N}$

Hvis a ikke er delelig med noe annet tall annet enn 1 og a sier vi at a er et primtall

Faktoriseringe: Aritmetikkens fundamental-teorem
Ethvert tall a kan skrives som et produkt av primtall på entydig måte

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdots p_n$$

f.eks $36 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$

partall $= \{2, 4, 6, 8, \dots\} = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$

oddetall $= \{1, 3, 5, \dots\} = \{2n-1 : n \in \mathbb{N}\}$

SUMMER

Vi kan skrive $1+2+3+\cdots+100$ som en sum

$$\sum_{i=1}^{100} i$$

Tilsvarende: $2+4+6+\cdots+100 = \sum_{k=1}^{50} 2k$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10} = \sum_{l=1}^{10} \frac{1}{l}$$

Mer generelt

$$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_m = \sum_{i=k}^{m} a_i$$

i kalles summasjons-indeks og k og m er hhv. nedre og øvre summasjonsgrense

Eks: $1+x+x^2+\cdots+x^{17} = \sum_{i=0}^{17} x^i$ (Husk $x^0=1$)

$$1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots-x^{17} = \sum_{i=0}^{17} (-1)^i x^i$$

Egenskaper ved summer

(i) $$\sum_{i=k}^{m} a_i + \sum_{i=k}^{m} b_i = \sum_{i=k}^{m} (a_i + b_i)$$

(ii) $$\sum_{i=1}^{m} c \cdot a_i = c \sum_{i=1}^{m} a_i$$ for ethvert tall c

Bevis: $$\sum_{i=1}^{m} c a_i = c a_1 + c a_2 + \cdots + c a_m = c \cdot (a_1 + a_2 + \cdots + a_m) = c \sum_{i=1}^{m} a_i$$ $\square$

(iii) $$\sum_{i=k}^{m} a_i + \sum_{i=m+1}^{l} a_i = \sum_{i=k}^{l} a_i$$

Bytte av summasjonsindeks

De to summene

$$\sum_{k=-3}^{11} (-1)^k x^{k+3} \quad \text{og} \quad \sum_{k=0}^{14} (-1)^{k+1} x^k$$

er begge lik $-1 + x - x^2 + x^3 - \cdots - x^{14}$

Lett å sjekke, men vil vise det!

Har $S = \sum_{k=-3}^{11} (-1)^k x^{k+3}$ (summen til venstre)

kan definere en ny summasjonsindeks $i = k+3$

betyr $k = i - 3$

Når $k = -3$ er $i = 0$

$k = 11$ er $i = 14$

Bytter ut k med $i-3$ i summen $S = \sum_{k=-3}^{11} (-1)^k x^{k+3}$

og får

$$S = \sum_{i=0}^{14} (-1)^{i-3} x^i$$

$$(-1)^{i-3} \cdot 1 = (-1)^{i-3} \cdot (-1)^4 = (-1)^{i+1}$$

$$= \sum_{i=0}^{14} (-1)^{i+1} x^i$$

Som er det vi skulle frem til! (kan bytte fra i til k)