Eksempel på inhomogen, førsteordens differensligning

Inhomogene differensligninger.

Typisk

$$x_{n+2} + b\,x_{n+1} + C\,x_n = f(n)$$

<u>Eks.</u> Penger i banken, $x_0 = 1000$ kr, 1% rente

Setter inn kr. 100 hvert år

$$x_{n+1} = x_n + 0.01 x_n + 100$$

$$= 1.01 x_n + 100$$

$$x_{n+1} - 1.01 x_n = 100$$

Løse homogen lign:

$x_{n+1} - 1.01\, x_n = 0$

$x_n^h = (1.01)^n C$

Partikulær løsn.

Prøver med $x_n^P = A$

Vi får:

$$\left.\begin{aligned} A - 1.01 A &= 100 \\ 0.01 A &= -100 \end{aligned}\right\} A = -10000$$

$x_n = x_n^h + x_n^P$

$= (1.01)^n C - 10000$

Tilpasse C til x_0

Vi har $x_0 = 1000$

Da må $1000 = x_0 = C - 10000$

$$C = 11000$$

$$x_n = 11000(1.01)^n - 10000$$

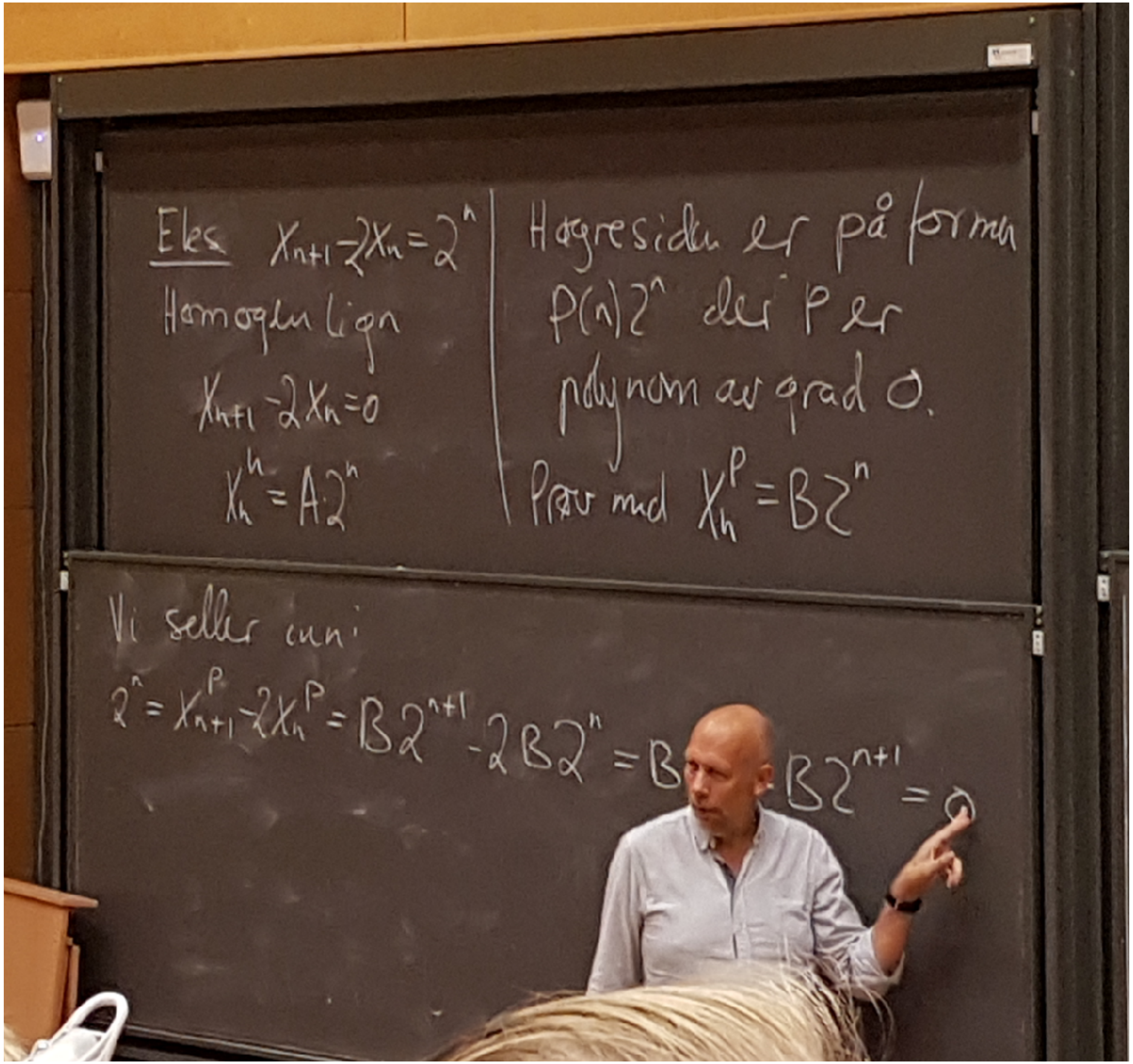
Hvilke høgre sider kan vi håndtere?

(i) $f(n)$ - polynom i n.

(ii) $f(n) = a^n P(n)$, $a \in \mathbb{R}$

(iii) $f(n) = b^n (A \sin(an) + B \cos(an))$

Eksempel der metoden for å finne partikulær løsning svikter


Eks $x_{n+1}-2x_n=2^n$
Homogen lign
$x_{n+1}-2x_n=0$
$x_n^h=A2^n$
Høgresiden er på formen
$P(n)2^n$ der P er
polynom av grad 0.
Prøv med $x_n^P=B2^n$
Vi setter inn:
$2^n=x_{n+1}^P-2x_n^P=B2^{n+1}-2B2^n=B$
$B2^{n+1}=0$

Eks. $x_{n+1} - 2x_n = 2^n$

Homogen lign

$x_{n+1} - 2x_n = 0$

$x_n^h = A \cdot 2^n$

Høgresiden er på formen $p(n)2^n$ der p er polynom av grad 0.

Prøv med $x_n^p = B2^n$

Vi setter inn:

$2^n = x_{n+1}^p - 2x_n^p = B2^{n+1} - 2B2^n = B2^{n+1} - B2^{n+1} = 0$

Høyre side har samme form som homogen løsning: Øk graden!

Prøv med $x_n^p = (A+Bn)2^n$ $\quad 2^n = \overbrace{2\cdot 2\cdot 2 \cdots 2}^{n}$

$$2^n = x_{n+1}^p - 2x_n^p = (A+B(n+1))2^{n+1}$$
$$-2(A+Bn)2^n$$
$$= 2^n(\cancel{2A} + 2Bn + 2B - \cancel{2A} - 2Bn) = 2^n(2B)$$

$\rightarrow 2^n = 2^{n+1}B$

$B = 1/2$

Altså $x_n^p = \frac{1}{2} n 2^n = n 2^{n-1}$

Total løsn.

$$x_n = x_n^h + x_n^p = A\cdot 2^n + n 2^{n-1}$$

To måter å løse differensligninger på

Vi har løst ligninger på formen

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = f(n), \quad b, c \in \mathbb{R}$$

$$x_{n+2} = f(n) - b x_{n+1} - c x_n$$

To løsningsmetoder:

(i) Finn eksplisitt formel for x_n

(ii) Generer verdiene av x_n fra differensligningen.

$$X_{n+2} = X_{n+1} + X_n \ , \ X_0 = X_1 = 1$$

$n=0 \quad X_2 = X_1 + X_0 = 2$

$n=1 \quad X_3 = X_2 + X_1 = 2+1 = 3$

$$X_n = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Hva om ligningen blir

$$X_{n+2} = f(n) - f_0(n)X_{n+1} - f_1(n)X_n \ ,$$
$$= F(n, X_{n+1}, X_n)$$

f_0, f_1 - funksjoner av n.

Eksempel på simulering

$$x_{n+2} = -10 + \frac{19}{3} x_{n+1} - 2 x_n$$

diff.py

~/Documents/.../.../.../.../difference_eqs/dif... (no function selected)

```python
from math import *
from numpy import zeros

def f(n,xp,xpp):
    return(19.*xp/3.-2.*xpp-10)

N = 30
index_set = range(N+1)
x = zeros(len(index_set))
x[0] = 2
x[1] = 8./3.

for n in range(2,N+1):
    x[n] = f(n,x[n-1],x[n-2])

    print (n,': ', x[n])
```

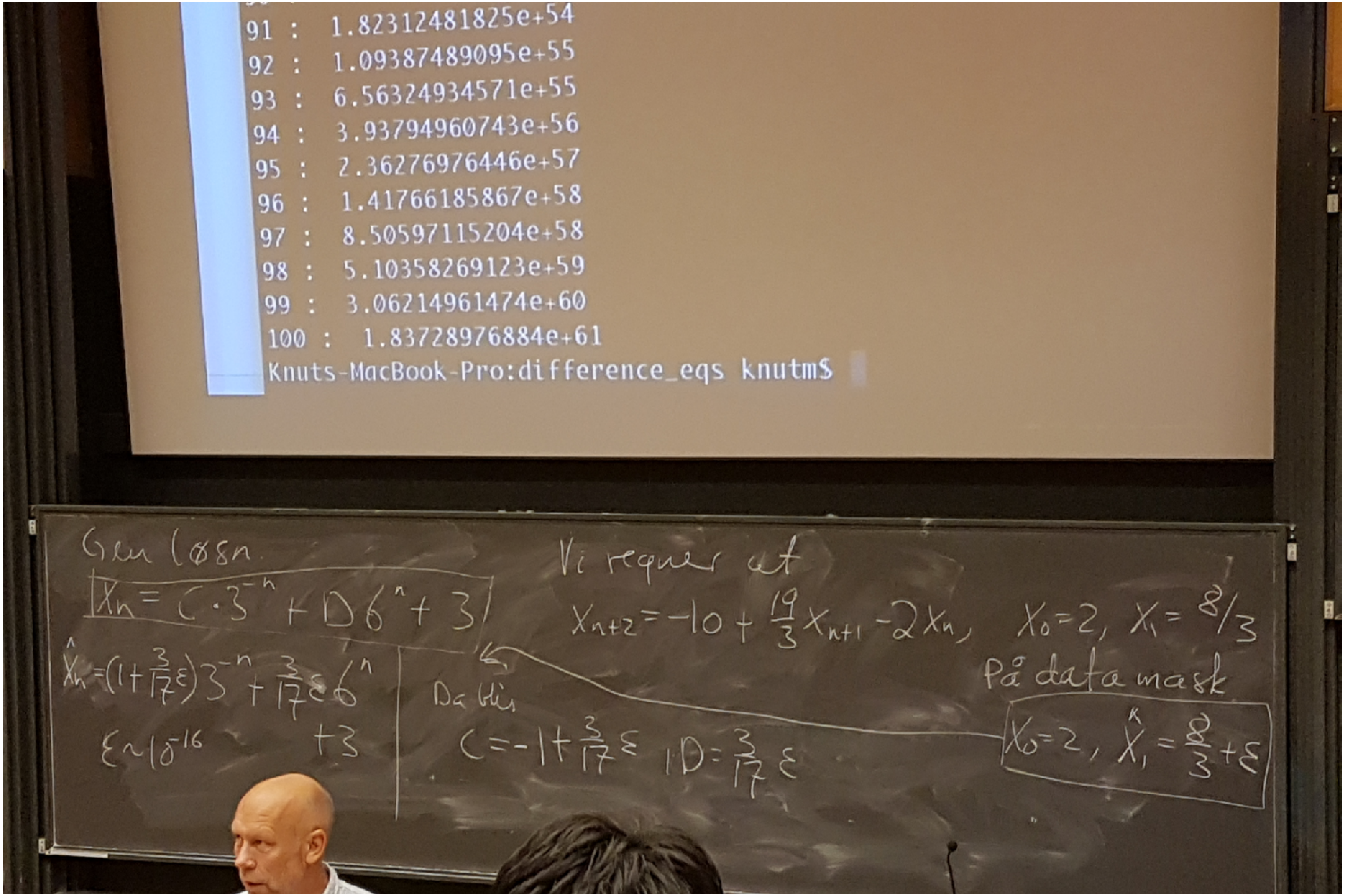
L: 3 C: 1 Python Unicode (UTF-8, with BOM) Unix (LF) 249 / 53 / 18

Vi ser på

$$x_{n+2} - \frac{19}{3} x_{n+1} + 2x_n = -10 \,, \quad x_0 = 2,\ x_1 = 8/3$$

Gen løsn. $x_n = C \cdot 3^{-n} + D 6^n + 3$

Startverdier gir $C = -1,\ D = 0,\ x_n = 3 - 3^{-n}$


91 : 1.82312481825e+54
92 : 1.09387489095e+55
93 : 6.56324934571e+55
94 : 3.93794960743e+56
95 : 2.36276976446e+57
96 : 1.41766185867e+58
97 : 8.50597115204e+58
98 : 5.10358269123e+59
99 : 3.06214961474e+60
100 : 1.83728976884e+61
Knuts-MacBook-Pro:difference_eqs knutm$
Gen løsn.
$X_n = C\cdot 3^{-n} + D\,6^n + 3$
$\hat{X}_n = (1+\frac{3}{17}\varepsilon)3^{-n} + \frac{3}{17}\varepsilon\,6^n + 3$
$\varepsilon \sim 10^{-16}$
Vi regner ut
$X_{n+2} = -10 + \frac{19}{3}X_{n+1} - 2X_n,\quad X_0 = 2,\ X_1 = 8/3$
På data mask
$X_0 = 2,\ \hat{X}_1 = \frac{8}{3} + \varepsilon$
Da blir
$C = -1 + \frac{3}{17}\varepsilon,\ D = \frac{3}{17}\varepsilon$