Det fins irrasjonale tall!

Med andre ord, det fins tall som ikke er brøker!

Hjelperesultat. Hvis $a \in \mathbb{N}$ er et oddetall så er også a^2 et oddetall.

Bevis. Hvis a er et oddetall så må $a = 2n+1$ for et naturlig tall n.

Da er $a^2 = (2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 2(2n^2+2n)+1$

Konsekvens (korollar). Hvis b^2 er et partall må også b være et partall ($b, b^2 \in \mathbb{N}$).

Teorem. $\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

Bevis. Vi må bevise at $\sqrt{2}$ ikke kan skrives som en brøk.

Bevis ved selvmotsigelse.

Anta at $\boxed{\sqrt{2} = \frac{a}{b}}$ der a, b er heltall uten felles faktorer.

Vi kvadrerer: $2 = \frac{a^2}{b^2}$ så $\boxed{a^2 = 2b^2}$

Vi ser at a^2 er et partall så a må også være et partall.

Det vil si at $\boxed{a = 2n}$ for et passende heltall.

$(2n)^2 = 2b^2$. Dermed er $4n^2 = 2b^2$

så $b^2 = 2n^2$. Men da er også b et partall.

Altså er både a og b partall. Men a og b skulle ikke ha felles faktorer! Selvmotsigelse!

Setning. Ethvert åpent intervall inneholder både rasjonale og irrasjonale tall.

Arkimedes prinsipp.

(i) For ethvert tall a fins det et naturlig tall n slik at $n > a$.

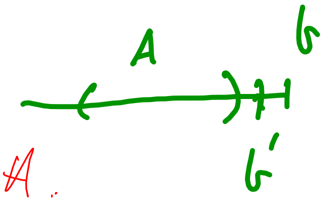
(ii) For ethvert positivt reelt tall b fins det et naturlig tall m slik at $\frac{1}{m} < b$.

$\frac{1}{m}$

Kompletthetsprinsippet

Popul. Fylle hullene i tallinjen som de rasjonale tallene etterlater seg.

En delmengde A av $\mathbb{R}$ kalles oppad begrenset hvis det fins et tall b slik at $b \geq x$ for alle $x \in A$.



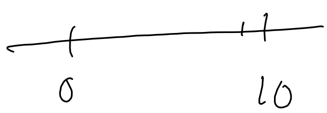
b kalles en øvre skranke for A.

b er minste øvre skranke for A hvis b er mindre enn alle mulige andre øvre skranker.

minste øvre skranke $\sup A$.

$A = [0, 10]$, $\sup A = 10$

$A = (0, 10)$, $\sup A = 10$



Kompletthetsprinsippet

Enhver, ikke tom, oppad begrenset delmengde A av $\mathbb{R}$ har en minste øvre grense i $\mathbb{R}$.

Ex. $\sqrt{2}$ er et reelt tall.

Sett $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x^2 < 2\}$

Vi ser at $1 \in A$, 2 er en øvre skranke.

Mulig å se at at minste øvre grense b må tilfredstille $b^2 = 2$