Induksjonsbevis

Vi har ofte behov for å summere de n første naturlige tallene,

$$\sum_{i=1}^{n} i \quad ?$$

Eksempler

$n=1$ $\sum_{i=1}^{1} i = 1$, $n=2$ $\sum_{i=1}^{2} i = 1+2 = 3$

$n=3$ $\sum_{i=1}^{3} i = 1+2+3 = 6$

Det viser at formelen

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = S_n \quad , \quad n = 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

ofte stemmer.

Vi ser at $S_1 = 1$, $S_2 = 3$, $S_3 = 6$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = S_n$$

Forslag til verifisering:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 \qquad \text{stemmer med} \qquad S_1 = 1$$

$$\sum_{i=1}^{2} i = \sum_{i=1}^{1} i + 2 = 3 \qquad -\text{''}- \qquad S_2 = \frac{2\cdot 3}{2} = 3$$

$$\sum_{i=1}^{3} i = \sum_{i=1}^{2} i + 3 = 3 + 3 = 6 \qquad -\text{''}- \qquad S_3 = \frac{3\cdot 4}{2} = 6$$

$$\sum_{i=1}^{4} i = \sum_{i=1}^{3} i + 4 = 6 + 4 = 10 \qquad -\text{''}- \qquad S_4 = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$$

Anta at vi sjekker og at det stemmer for $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots, k$.

Vil det da stemmer for $n = k+1$?

Da vet vi at $\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2}$.

Vil da $\boxed{\sum_{i=1}^{k+1} i = S_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}}$?

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \cdot 1$$

$$= (k+1)\left(\frac{k}{2} + 1\right)$$

$$= (k+1)\left(\frac{k}{2} + \frac{2}{2}\right)$$

$$= (k+1)(k+2) \cdot \frac{1}{2}$$

$\checkmark \; \checkmark \; \checkmark \; \checkmark \; \checkmark \; \checkmark \; \checkmark \qquad \checkmark \; \checkmark$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots, k, k+1, \ldots$

Siden k var vilkårlig kan vi sette $k = 7$

Kan komme fra $k \to k+1$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \ldots$

$k=1 \Rightarrow k+1 = 2$

$k=2 \Rightarrow k+1 = 3$

$k=3 \Rightarrow k+1 = 4$

Generelt induksjonsbevis

Vi har mange utsagn P_n, $n = 1, 2, \ldots$
$n \in \mathbb{N}$
som vi skal sjekke at er sanne.

Med induksjonsbevis gjør vi følgende:

i) Sjekk at P_n er sann for $n=1$

ii) Anta at P_n er sann for $n=k$ og bruk dette til å vise at P_n er sann for $n=k+1$.

Oppgave

Vis at $n(n^2+5)$ er delelig med 6 for $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$, $n \in \mathbb{N}$

P_n: $n(n^2+5)$ er delelig med 6

Følger oppskrift!

i) Sjekk for $n=1$. $n(n^2+5) = 1\cdot(1+5) = 6$

For moro skyld, $n=2$, $n(n^2+5) = 2\cdot(4+5) = 18$

ii) Anta nå at P_n er sann for $n=k$,

$k(k^2+5)$ er delelig med 6.

Vi må vise at P_n er sann for $n=k+1$.

$(k+1)((k+1)^2+5)$ er delelig med 6.

$(k+1)((k+1)^2+5)$: Vi må vise at 6 er en faktor.

Vi regner med et mål:

$$(k+1)((k+1)^2+5) = k((k+1)^2+5) + (k+1)^2+5$$

$$= k(k^2+2k+1+5) + (k+1)^2+5$$

$$= k(k^2+5) + k(2k+1) + (k+1)^2+5$$

$$= k(k^2+5) + 2k^2+k + k^2+2k+1 + 5$$

$$= k(k^2+5) + 3k^2+3k+6$$

$$= k(k^2+5) + \underbrace{3k(k+1)} + 6 \longrightarrow \text{opplagt delelig med 6}$$

delelig med 6 ved antagelse

Opplagt delelig med 3. k eller k+1 vil alltid være et partall så k(k+1) er alltid delelig med 2. Dermed OK.