Binomialformelen

Hva er $(a+b)^n$?

Husk at $(a+b)^0 = 1$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = (a+b)^2(a+b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a+b)$$

$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + (2+1)a^2b + (1+2)ab^2 + b^3$$

$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b)$$

Pascals trekant

					1					
				1		1				
			1		2		1			
		1		3		3		1		
	1		4		6		4		1	
1		5		10		10		5		1

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Binomialformulen

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^{i} \quad , \quad n \geq 0$$

der $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!\,(n-i)!}$, $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \cdots n$

$\binom{n}{i}$ - binomialkoeffisient

$$\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3\cdot 2\cdot 1}{1\cdot 2\cdot 1} = 3$$

Pascals trekant som:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \binom{0}{0}^{1} & & & \\
 & & \binom{1}{0}^{1} & & \binom{1}{1}^{1} & & \\
 & \binom{2}{0}^{1} & & \binom{2}{1}^{2} & & \binom{2}{2}^{1} & \\
\binom{3}{0}^{1} & & \binom{3}{1}^{3} & & \binom{3}{2}^{3} & & \binom{3}{3}^{1}
\end{array}$$

$$\binom{n}{i-1} \quad \binom{n}{i}$$

$$\binom{n+1}{i}$$

Er $\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}$?

For alle naturlige tall n og alle i med $1 \le i \le n$ er $\qquad n-(i-1) = n-i+1$

$$\binom{n+1}{i} = \binom{n}{i-1} + \binom{n}{i}$$

Bevis: $\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} = \dfrac{n!}{(i-1)!\,(n-i+1)!} + \dfrac{n!}{i!\,(n-i)!}$

$$= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}\left(\frac{1}{n-i+1} + \frac{1}{i}\right)$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}\left(\frac{i}{(n-i+1)i} + \frac{n-i+1}{(n-i+1)i}\right)$$

$$= \frac{n!}{(i-1)!\,(n-i)!}\left(\frac{n+1}{i(n-i+1)}\right) = \frac{(n+1)!}{i!\,(n-i+1)!}$$

$$= \binom{n+1}{i}$$

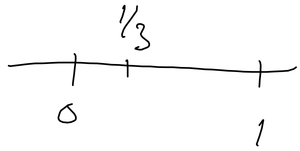
Reelle tall

De reelle tallene: $\mathbb{R}$. De vanligste delmengdene av $\mathbb{R}$ er intervallene

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ – lukket

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

Ex: $(0,1)$



<u>Tallverditegn</u>

Tallverdien til a er definert ved

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{hvis } a \geq 0 \\ -a, & \text{hvis } a < 0 \end{cases}$$

$|2| = 2$, $|-2| = 2$, $|0| = 0$

Trekantulikheten. Hvis $a, b \in \mathbb{R}$ så er

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

Rasjonale og irrasjonale tall

Et reelt tall x som kan skrives som en brøk $x = a/b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ kalles et rasjonalt tall.

Alle rasjonale tall: $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \{ a/b \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \}$$

$b = 1$ er OK så $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Et reelt tall som ikke er rasjonalt sies å være irrasjonalt.

Setning. Hvis x og y er rasjonale tall så er $x+y$, $x-y$, xy og x/y $(y \neq 0)$ også rasjonale tall.

$1+\sqrt{2}$

Korollar.

Dersom en av x og y er rasjonal og den andre irrasjonal så er $x+y$, $x-y$ irrasjonale. Hvis i tillegg lede x og $y \neq 0$ så er xy og x/y irrasjonale.

Bevis: Anta at x rasj. og y irrasjonal

Sett $a = x+y$, vi må vise at a er irrasjonal.

Anta det motsatte, at a er rasjonal.

Siden $a = x+y$ er $y = a-x$. – katastrofe

Hva har vi gjort galt? a ~~kan~~ kan ikke være rasjonal