Andreordens, homogene, lineære ligninger med konstante koeff.

Dette er ligninger på formen

$$(\#) \quad y'' + py' + qy = 0 \quad , \quad p, q \in \mathbb{R}$$

$y = y(x)$ en ukjent funksjon.

<u>Lemma.</u> Anta at y_1 og y_2 er to løsninger av (#). Da er også

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

en løsning uansett valg av C_1 og C_2.

Hvordan finne en løsning?

Vi vet at $y' = ry$ har løsningen $y = Ce^{rx}$

Vi prøver med $y(x) = e^{rx}$ som løsning av (#) og ser hvilke krav vi får på r.

Hvis $y = e^{rx}$ er $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2 e^{rx}$

Vi setter inn i $y'' + py' + qy = 0$.

$$0 = y'' + py' + qy = r^2 e^{rx} + p r e^{rx} + q e^{rx}$$
$$= e^{rx}(r^2 + pr + q)$$

Altså må $r^2 + pr + q = 0$.

i) To reelle røtter r_1 og r_2

ii) Én reell rot r

iii) Komplekse konjugerte røtter r og $\bar{r}$

i) Karakteristisk ligning $r^2 + pr + q = 0$
har to røtter r_1 og r_2 (reelle).
Da er generell løsning
$$y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$
(og dette er alle løsningene!)

Eksempel $y''+y'-2y=0$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

Kar. ligning $r^2+r-2=0$

$r=-\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{8}{4}}=-\frac{1}{2}\pm\frac{3}{2}$, $r_1=-2$, $r_2=1$

Altså er $y(x)=C_1e^{r_1x}+C_2e^{r_2x}$

$=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$

$1=y(0)=C_1+C_2$, $y'(x)=-2C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$

$0=y'(0)=-2C_1+C_2 \Rightarrow C_2=2C_1$

Innsatt $1=C_1+C_2=C_1+2C_1=3C_1$, $C_1=\frac{1}{3}$

$y(x)=\frac{1}{3}e^{-2x}+\frac{2}{3}e^{x}$. $C_2=2/3$

ii) En reell rot r.

Da vet vi at $y_1(x) = e^{rx}$ er en løsning.

En annen løsning er da $y_2(x) = x e^{rx}$.

Generell løsning er $y(x) = e^{rx}(C_1 + C_2 x)$

Dette er alle løsningene!

Eks. $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = -2$.

Kar. lign. $r^2 - 4r + 4 = 0$ $(r-2)^2 = 0$

$$r = 2 \pm \sqrt{2^2 - 4} = 2.$$

Gen. løsning $y(x) = e^{2x}(C_1 + C_2 x)$

$$y'(x) = 2e^{2x}(C_1 + C_2 x) + e^{2x} \cdot C_2$$

$0 = y(1) = e^2(C_1 + C_2) \Rightarrow C_2 = -C_1$

$-2 = y'(1) = 2e^2(C_1 + C_2) + e^2 \cdot C_2 = 2e^2 C_1 + 3e^2 C_2$

$-2 = 2e^2 C_1 - 3e^2 C_1$, $-2 = -e^2 C_1$, $C_1 = 2e^{-2}$.

$C_2 = -2e^{-2}$

$$y(x) = e^{2x}(2e^{-2} - 2e^{-2}x)$$
$$= 2e^{2(x-1)}(1 - x)$$

iii) To komplekse røtter r og $\bar{r}$

Da er generell løsning $y(x) = C_1 e^{rx} + C_2 e^{\bar{r}x}$.

Hvis vi ikke passer oss blir $y(x)$ kompleks.

Hvis vi velger $C_2 = \bar{C_1}$ går det bra.

$$y(x) = C_1 e^{rx} + \bar{C_1} e^{\bar{r}x}.$$

Sjekker at $y(x)$ er reell.

Anta at $r = a + ib$, $\bar{r} = a - ib$

$C_1 = A + iB$, $\bar{C_1} = A - iB$

$$y(x) = (A+iB) e^{(a+ib)x} + (A-iB) e^{(a-ib)x} \qquad , e^{(a+ib)x} = e^{ax} \cdot e^{ibx}$$

$$= e^{ax}\left((A+iB)e^{ibx} + (A-iB)e^{-ibx}\right)$$

$$= e^{ax}\left((A+iB)(\cos bx + i\sin bx) + (A-iB)(\cos bx - i\sin bx)\right)$$

$$= e^{ax}\left(2A\cos bx + 2i^2 B\sin bx\right)$$

$$= e^{ax}\left(2A\cos bx - 2B\sin bx\right)$$

$$= e^{ax}\left(C\cos bx + D\sin bx\right)$$

iii) To komplekse konjugerte røtter r og $\bar{r}$
der $r = a + ib$.

Generell løsning $y(x) = e^{ax}(C \cos bx + D \sin bx)$

Dette er alle løsningene!

<u>Eks</u> $y'' + 2y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Kar. ligns. $r^2 + 2r + 4 = 0$

$r = -1 \pm \sqrt{1-4} = -1 \pm i\sqrt{3}$, $a = -1$, $b = \sqrt{3}$

Generell løsning $y(x) = e^{-x}(C \cos\sqrt{3}x + D \sin\sqrt{3}x)$

$1 = y(0) = e^{-0}(C \cos 0 + D \sin 0) = C$

$y'(x) = -e^{-x}(C\cdot\cos + D\cdot\sin) + e^{-x}(C\cdot\sqrt{3}(-\sin\sqrt{3}x) + D\sqrt{3}\cos\sqrt{3}x)$

$0 = y'(0) = -1(C + D\cdot 0) + 1(C\cdot\sqrt{3}\cdot 0 + D\sqrt{3}\cdot 1)$

$= -C + D\sqrt{3}$, $C = 1$ så $D = 1/\sqrt{3}$

$y(x) = e^{-x}(\cos\sqrt{3}x + \frac{1}{\sqrt{3}}\sin\sqrt{3}x)$

Inhomogene ligninger:

$$y'' + Py' + qy = f(x) \qquad (*)$$

Lemma Anta at y_P er en løsning av $(*)$. Da er enhver annen løsning gitt ved

$$y = y_P + y_h$$

der y_h er en løsning av den homogene ligningen $y'' + Py' + qy = 0$

Generell strategi for å finne y_p:

Prøv med en løsning på samme form som høyresiden.

Ex. $y'' + y' - 2y = 2x$

Gjetter på løsning på samme form som $2x$, men generell.

$y_p(x) = Ax + B$, $y_p'(x) = A$, $y_p''(x) = 0$

$$2x = y'' + y' - 2y = 0 + A - 2(Ax + B)$$
$$= -2Ax + A - 2B \quad \text{for alle } x$$

Da må koeffisientene være like:

$2 = -2A$, $0 = A - 2B$

$A = -1$, $B = A/2 = -1/2$

$y_p(x) = Ax + B = -x - 1/2$

i) $f(x) = P(x)$ – polynom

ii) $f(x) = P(x)a^x$ – P – polynom, $a \in \mathbb{R}$

iii) $f(x) = a^x(A\cos bx + B\sin bx)$.