MAT-INF1100 – FORELESNING 5/9-2017

I DAG: TALL OG SIFFERSYSTEMER 2.1–2.2, 3.1–3.3 i komp

3.14

Heltallsdel   Brøkdel

Generelt kan vi skrive et tall som

$$d_k d_{k-1} \cdots d_0 . d_{-1} d_{-2} d_{-3} \cdots$$

Hvis a og b er to naturlige tall, så skriver vi

$a // b$ resultatet av a/b når vi kaster resten

$a \% b$ angir resten i a/b.

Eks: $3//2 = 1$ og $3 \% 2 = 1$

$9//4 = 2$ og $9 \% 4 = 1$

$25//5 = 5$ og $25 \% 5 = 0$

$6//4 = 1$ og $6 \% 4 = 2$

Ser at $\quad a/b = a//b + \dfrac{a \% b}{b}$

heltallsdel   brøkdel $\in [0,1)$

HELTALL

Se på $3761 = 3\cdot 1000 + 7\cdot 100 + 6\cdot 10 + 1$

$= 3\cdot 10^{3} + 7\cdot 10^{2} + 6\cdot 10^{1} + 1\cdot 10^{0}$

Her er grunntallet $\beta = 10$

Hva om vi bruker grunntallet $\beta = 7$?

F.eks $341_7 = 3\cdot 7^2 + 4\cdot 7^1 + 1\cdot 7^0 = 176_{10}$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Generelt: Heltall i et tallsystem med grunntall } \beta \in \mathbb{N} \quad \beta > 1 \\ \text{kan representeres som} \\ (d_k d_{k-1} d_{k-2} \cdots d_0)_\beta = d_k\cdot\beta^k + d_{k-1}\cdot\beta^{k-1} + \cdots + d_0\cdot\beta^0 \\ \text{hvor } d_i\text{'ene er siffere – dvs heltall mellom } 0 \text{ og } \beta-1\end{array}}$$

Eks $\beta = 2$ Tillatte siffer: 0 og 1

$101_2 = 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0 = 4+0+1 = 5_{10}$

Eks: $\beta = 16$ Tillatte „siffer": 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 = a, 11 = b, 12 = c, 13 = d, 14 = e, 15 = f

$2d7_{16} = 2\cdot 16^2 + d\cdot 16^1 + 7\cdot 16^0$

$= 2\cdot 16^2 + 13\cdot 16^1 + 7\cdot 16^0$

$= 727_{10}$

Hvordan skrives tallet β i β-tallsystem?

Svar: 10_β

Hva med β^3?

Svar 1000

Lemma: Ethvert naturlige tall kan representeres på <u>entydig</u> måte med grunntall $\beta \in \mathbb{N}$, $\beta > 1$ $\square$

<u>Eks</u>: Se på 3761_{10} og $\beta = 8$

Skal forsøke å finne d_0, d_1, d_2, d_3 slik at

$$3761_{10} = {d_3 d_2 d_1 d_0}_8 = d_3 \cdot 8^3 + d_2 \cdot 8^2 + d_1 \cdot 8^1 + d_0 \cdot 8^0$$

La oss dele begge sider med 8

$$3761 // 8 = 470 \quad \text{og} \quad 3761 \% 8 = 1$$

$$3761_{10} = \underbrace{d_3 \cdot 8^3 + d_2 \cdot 8^2 + d_1 \cdot 8^1}_{470} + \underbrace{d_0 \cdot 8^0}_{\frac{d_0}{8}}$$

$$470 + \frac{1}{8} = 470 \qquad \frac{d_0}{8}$$

$\Rightarrow$ Ser at d_0 må være lik 1

Nå vet vi at

$$470 = \frac{d_3 \cdot 8^3 + d_2 \cdot 8^2 + d_1 \cdot 8^1}{8} = d_3 \cdot 8^2 + d_2 \cdot 8^1 + d_1$$

Kan bruke samme triks: dele med 8

$$470 // 8 = 58 \quad \text{og} \quad 470 \% 8 = 6$$

Da må d_1 være lik resten, dvs 6

$\Rightarrow$ $d_1 = 6$

Fortsetter på samme måte, dvs dele på $\beta = 8$

$$58 // 8 = 7 \quad \text{og} \quad 58 \% 8 = 2$$

Vet at $58 = d_3 \cdot 8 + d_2$

$\Rightarrow$ $d_2 = 2$

Til slutt står vi igjen med

$$7 = d_3$$

Oppsummert: $\underline{\underline{3761_{10} = 7261_8}}$

Hva blir 9_{10} i 8-tallsystemet?

$9 // 8 = 1$ $\quad$ $9 \% 8 = 1 = d_0$

da nå $d_1 = 1$

$\Rightarrow 9_{10} = 11_8$

Ex $B=2$

$//2 \downarrow$	$\xrightarrow{\%2}$
3761	$1 = d_0$
1880	$0 = d_1$
940	0
470	0
235	1
117	1
58	0
29	1
14	0
7	1
3	1
1	1

$3761_{10} = 111010110001_2$

Eks $B=8$

$//8 \downarrow$	$\%8$
3761	1
470	6
58	2
7	7

$3761_{10} = 7261_8$

Algoritme: For å finne sifferne til et heltall a i β-tallsystem:

$a_0 = a$

for $i = 0, \dots, k$

  $d_i = a_i \,\%\, \beta$

  $a_{i+1} = a_i \,//\, \beta$

Alternativ algoritme

while $a > 0$

  $d = a \,\%\, \beta$

  $a = a \,//\, \beta$

BRØKTALL

3.14

Eks: $0.14 = 1 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} = 1 \cdot 10^{-1} + 4 \cdot 10^{-2}$

$0.45928 = 4 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 9 \cdot 10^{-3} + 2 \cdot 10^{-4} + 8 \cdot 10^{-5}$

Generelt er brøktall på formen $0.d_1 d_2 d_3 \ldots$

på samme måte som for heltall, så kan vi bruke et hvilket som helst grunntall $B \in \mathbb{N}$ $B > 1$ til å representere brøktall som

$$(0.d_{-1} d_{-2} d_{-3} \cdots)_B = d_{-1} B^{-1} + d_{-2} B^{-2} + d_{-3} B^{-3} + \cdots$$

der d_i'ene heltall mellom 0 og $B-1$

Det minste brøktallet på denne formen?

$$(0.00 \cdots)_B = \underline{\underline{0}}$$

Hva med det største? Alle $d_i = B - 1$ dvs.

$$(B-1) \cdot B^{-1} + (B-1) B^{-2} + (B-1) B^{-3} + \cdots$$

$$= \frac{B-1}{B} \underbrace{\left(1 + B^{-1} + B^{-2} + \cdots\right)}_{\text{geometrisk rekke}} = \frac{B-1}{B} \cdot \frac{B}{B-1} = \underline{\underline{1}}$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{B}\right)^i = \frac{1}{1 - \frac{1}{B}} = \frac{B}{B-1}$$

Har vist at et slikt brøktall alltid er i $[0,1]$