FORELESNING 19/4-2017

Differensligninger 4.1 i kalkulus

En følge er en sekvens av tall

$$a_0, a_1, a_2, \dots = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$$

En differensligning er en ligning der den ukjente er en følge

Ex: Anta at vi har 100.000 i banken til 3.2 % rente

Hvor mye har vi etter n år?

La x_n være beløpet etter n år. Vet at

$$x_n = x_{n-1} + 0.032 \cdot x_{n-1} = 1.032 \cdot x_{n-1}$$

Altså har vi ligningen

$$\boxed{x_n = 1.032 \cdot x_{n-1} \qquad x_0 = 100\,000 \quad \text{(initialbetingelse)}}$$

Differensligning der $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ er ukjent.

Kan enkelt simulere løsning i regneark f.eks

Generell differensligning av 1. orden:

$$\boxed{x_n = r \cdot x_{n-1}, \qquad x_0 = a \qquad r \in \mathbb{R}}$$

$$x_1 = x_0 \cdot r = ar$$

$$x_2 = x_1 \cdot r = x_0 \cdot r \cdot r = x_0 \cdot r^2$$

$$x_3 = x_0 \cdot r^3$$

$$\vdots$$

$$x_n = a \cdot r^n \qquad \text{(generell løsning)}$$

Spesiell løsning $\quad x_0 = 100\,000$

$$a \cdot 1.032^0 = 100\,000$$

$$a = 100\,000$$

$$x_n = 100\,000 \cdot (1.032)^n$$

Kaniner

Anta at kaninpar føder ett par unger hver måned fra de er to måneder gamle. Anta videre at vi starter med ett nyfødt par.

Hvor mange kaninpar har vi etter n måneder?

La x_n være antall kaninpar etter n måneder

n	0	1	2	3	4	5	6	7	....
x_n	1	1	2	3	5	8	13	21	...

Med andre ord:

$$\boxed{x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \quad x_0 = 1, \; x_1 = 1}$$

$n \geq 2$

Dette er en 2. ordens differensligning

Det viser seg at

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right) \qquad n \geq 0$$

Fibonacciligningen / følgen / tallene

LINEÆRE ANDRE-ORDENS HOMOGENE DIFFERENSLIGNINGER

$$\boxed{x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0 \qquad n \in \mathbb{N}, \quad b, c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0}$$

der den ukjente er følgen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$

<u>Ex</u>: $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$ Fibonacci-ligningen

For at en løsning $\{x_n\}$ skal være helt bestemt må vi kjenne to verdier, f.eks. x_0 og x_1

<u>Lemma 4.1.4</u>: Anta at vi har to løsninger $\{y_n\}$ og $\{z_n\}$ av

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$$

Da er også $\{x_n\}$ der

$$x_n = C y_n + D z_n \qquad n \in \mathbb{N}$$

en løsning for alle $C, D \in \mathbb{R}$

$\square$

Hvordan finne løsninger?

Så at for $\boxed{x_{n+1} = r x_n}$ var løsningene på formen

$$x_n = C \cdot r^n \quad \text{for } C \in \mathbb{R}$$

La oss prøve $x_n = r^n$ for et ukjent tall r

Vi setter inn:

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + C x_n = 0$$

$$r^{n+2} + b \cdot r^{n+1} + c \cdot r^n = 0 \qquad \text{sett } r^n \text{ utenfor}$$

$$r^n (r^2 + br + c) = 0$$

Hvis vi kan finne en r som løser denne ligningen, så har vi løsning av differens-ligning!

$r^n = 0$ blir en kjedelig løsning

$\boxed{r^2 + br + c = 0}$ Kan løses! Får generelt 2 løsninger r_1 og r_2. Da vet vi at

karakteristisk lgn.

$$x_n = C \cdot r_1^n + D \cdot r_2^n \quad \text{er løsning}$$

Må sjekke 3 tilfeller (avhenger av b, c)

1. $r_1 \neq r_2$ og $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$
2. $r_1 = r_2 = r$ med $r \in \mathbb{R}$
3. $r_2 = \bar{r}_1$ med $r_1 \in \mathbb{C}$

① To reelle røtter

Eks: $\boxed{x_{n+2} - 5x_{n+1} + 4x_n = 0}$

karakteristisk ligning: $r^2 - 5r + 4 = 0$

løsninger: $r_1 = 1$ og $r_2 = 4$

Da vet vi at $\{y_n\}$ med $y_n = 1^n$ er en løsning

$\{z_n\}$ med $z_n = 4^n$ — " —

og dermed.

$$x_n = C \cdot 1^n + D \cdot 4^n$$

$$= C + D \cdot 4^n \quad \text{(generell løsning)}$$

for alle $C, D \in \mathbb{R}$

La oss legge til initialverdier $x_0 = 1$ og $x_1 = -2$

$$x_0 = C + D \cdot 4^0 = \boxed{C + D = 1}$$
$$x_1 = C + D \cdot 4^1 = \boxed{C + 4D = -2}$$

ligninger i de ukjente C, D

Løsning: $C = 2$ og $D = -1$

Spesiell løsning: $x_n = 2 - 4^n$

Eks: Fibonacci $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$

karakteristisk ligning $r^2 - r - 1 = 0$

løsningene er $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

(2) To like røtter $r_1 = r_2 = r$

Da er $r_1^n = r_2^n = r^n$ løsning

Det viser seg at da er også

$$x_n = n \cdot r^n \quad \text{en løsning}$$

Generell løsning

$$\underline{x_n = C \cdot r^n + D \cdot n \cdot r^n}$$

Eks: $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 4x_n = 0$

karakt. ligning $r^2 - 4r + 4 = 0$

løsninger $r_1 = r_2 = r = 2$

Generell løsning $\underline{x_n = C \cdot 2^n + D \cdot n \cdot 2^n}$

Initialverdier $x_0 = 1$ og $x_1 = 8$

$x_0 = C + D \cdot 0 = 1 \Rightarrow C = 1$

$x_1 = C \cdot 2 + D \cdot 1 \cdot 2 = 8 \Rightarrow D = 3$

Spesiell løsning $\underline{x_n = 2^n + 3n \cdot 2^n}$ $n \in \mathbb{N}$