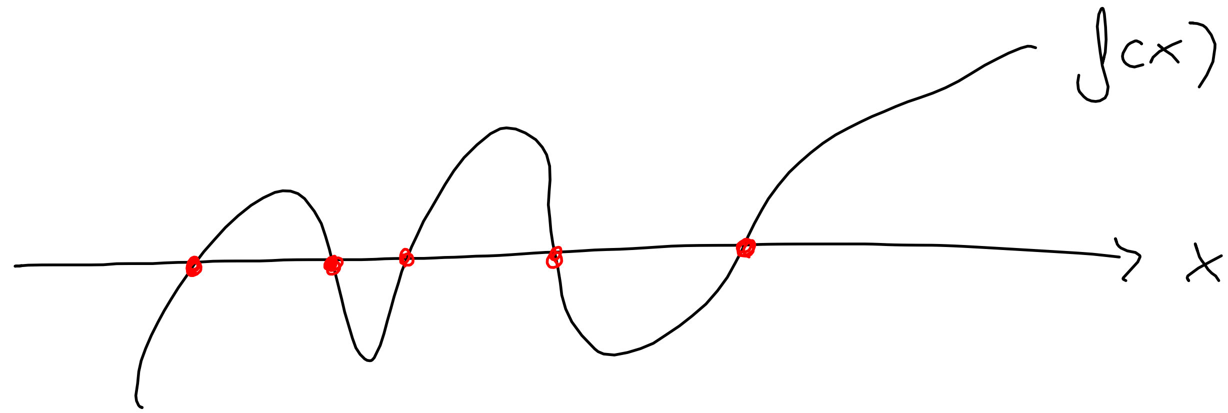
Løsning av ligninger (kap 10 i kompendiet)

Veldig mange problemer kan formuleres som

$$f(x) = 0$$



Dvs. finn $x \in \mathbb{R}$ slik at $f(x) = 0$

Hvordan?

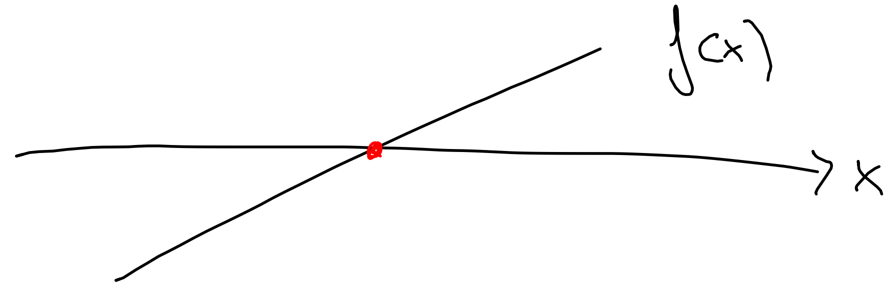
(1) Finn formel/oppskrift. Fungerer sjelden for ikketrivielle problemer.

(2) Finn numeriske tilnærminger til løsninger, med ønsket nøyaktighet. Fungerer „alltid".

Eks Lineære ligninger

$$f(x) = ax + b$$

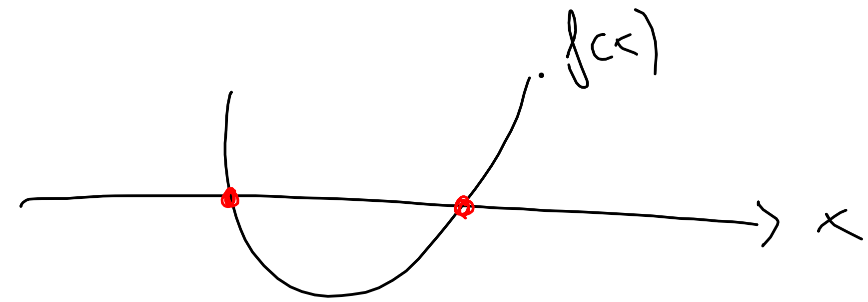
Løsning $x = -\frac{b}{a}$



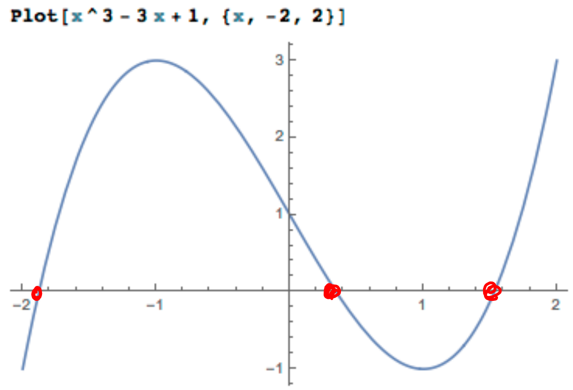
Kvadratiske ligninger

$$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$$

Løsninger $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$



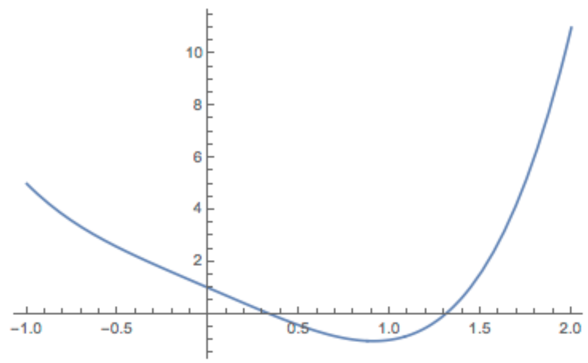
Løsning av x^3-3x+1=0



$$\frac{-20\sqrt[3]{\frac{3}{-9+\sqrt{12081}}}+\sqrt[3]{2\left(-9+\sqrt{12081}\right)}}{6^{2/3}}$$

Løsning av x^4-3x+1=0

```
Plot[x^4 - 3 x + 1, {x, -1, 2}]
```

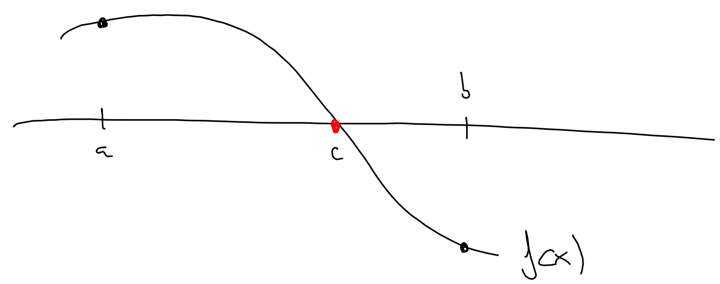


$$\frac{\sqrt{\sqrt[3]{81-\sqrt{5793}}+\sqrt[3]{81+\sqrt{5793}}}}{2\sqrt[6]{2}\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\left(-\sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(81-\sqrt{5793}\right)}-\sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(81+\sqrt{5793}\right)}+\frac{18\sqrt[6]{2}\sqrt[3]{3}}{\sqrt{\sqrt[3]{81-\sqrt{5793}}+\sqrt[3]{81+\sqrt{5793}}}}\right)}$$

N.H. Abel: Generelt har ikke $p(x)=0$ løsning med formel for $p(x)$ polynom av grad ≥ 5

$\Rightarrow$ Må bruke numeriske tilnærminger.

Halveringsmetoden (bisection - Kap 10.2)



Gitt en kontinuerlig funksjon $f(x)$ som har ulikt fortegn i a og b

Thm 10.1. Hvis $f(a) \cdot f(b) < 0$ og f er kontinuerlig,

så finnes det en $c \in (a,b)$

slik at $f(c) = 0$

(Løsning av $f(x) = 0$)

Halveringsmetoden:

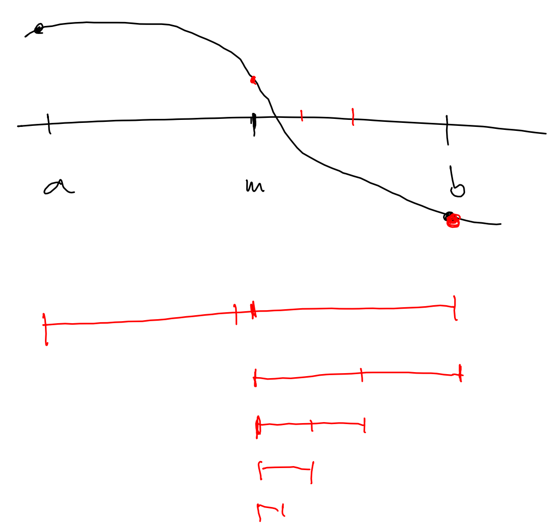
Dele intervallet på midten

$m = \frac{a+b}{2}$

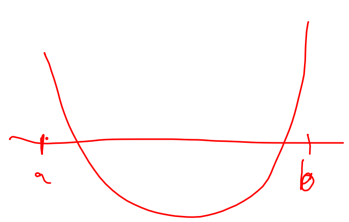
Får to intervaller $[a,m]$ og $[m,b]$

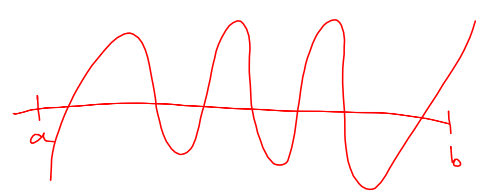
ett av disse må inneholde en løsning

Gjenta til intervallet er "lite nok"



Hva med følgende eksempler





Algoritme 10.2

$a_0 = a$

$b_0 = b$

for $i = 1, \dots, N$

$$m_{i-1} = \frac{a_{i-1} + b_{i-1}}{2}$$

if $f(m_{i-1}) = 0$

løsning funnet, ferdig!

if $f(a_{i-1}) \cdot f(m_{i-1}) < 0$

$a_i = a_{i-1}$

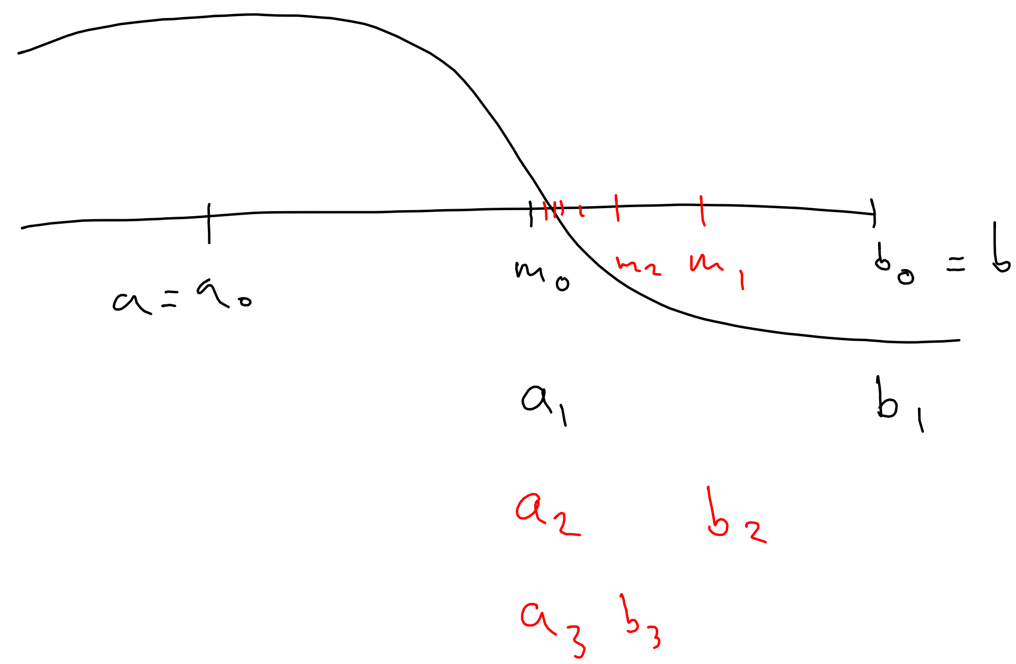
$b_i = m_{i-1}$

else

$a_i = m_{i-1}$

$b_i = b_{i-1}$

end for

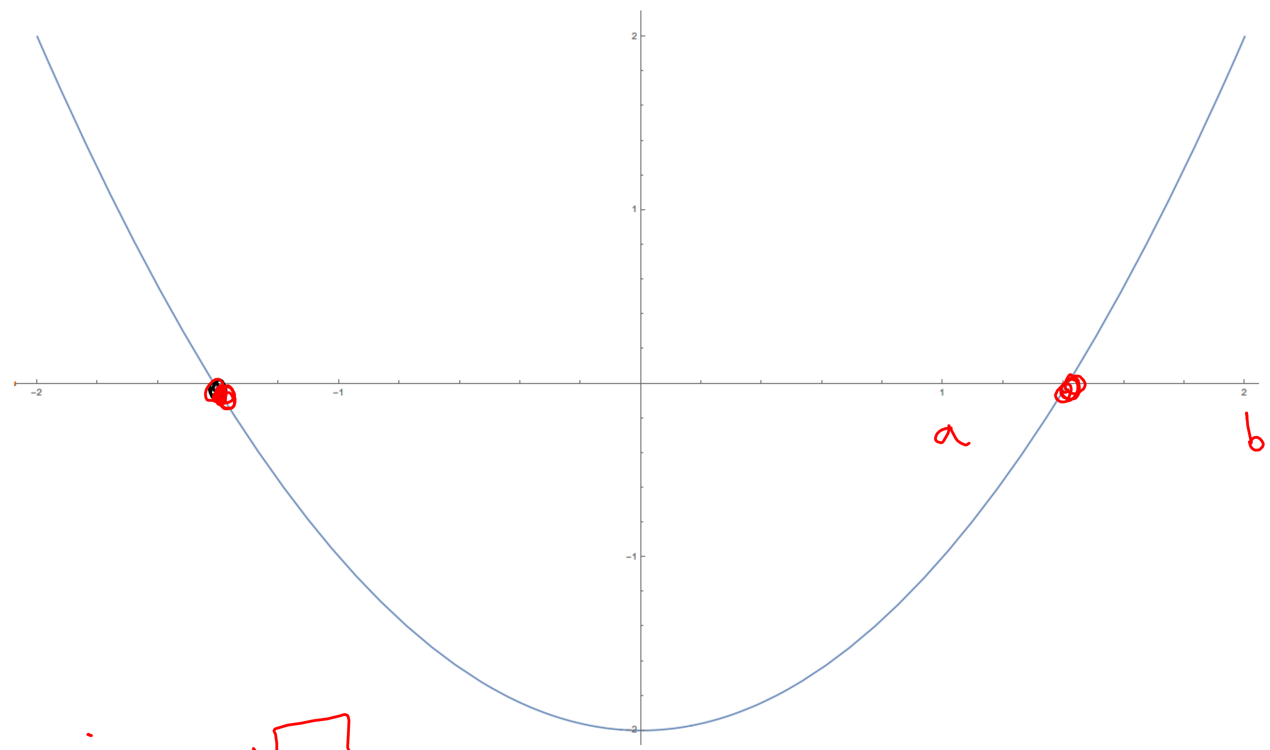


$$m_N = \frac{a_{N-1} + b_{N-1}}{2}$$ er en tilnærming til løsningen

Halveringsmetoden - eksempel

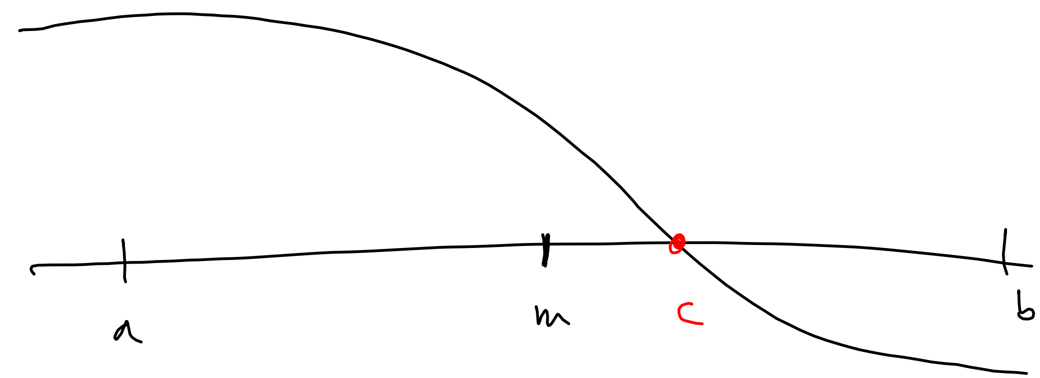
Finn x slik at $f(x) = x^2 - 2 = 0$, startverdier a=1 og b=2

$$
\begin{aligned}
m_0 &= 1.50000000000,\\
m_1 &= 1.25000000000,\\
m_2 &= 1.37500000000,\\
&\vdots\\
m_{33} &= 1.41421356233.
\end{aligned}
$$



Tilnærming til eksakt løsning $\sqrt{2}$
med feil $< 10^{-10}$

Feilanalyse



Absoluttfeilen er begrenset

$$|c - m| < \frac{b-a}{2}$$

Etter N steg (halveringer) en

$$|c - m_N| < \frac{b-a}{2^{N+1}}$$

Hvis vi ønsker feil mindre enn en ε (f.eks 10^{-10})
så kan vi løse ulikheten

$$\frac{b-a}{2^{N+1}} < \varepsilon$$

for N. Løsningen (av ulikheten) er

$$N > \frac{\ln(b-a) - \ln \varepsilon}{\ln 2} - 1$$

Relativ feil

$$\left|\frac{c - m_N}{c}\right| < \frac{b-a}{2^{N+1} \cdot |c|} \approx \frac{b-a}{2^{N+1}|m_N|}$$

Kan kjøre halveringsmetoden til denne er „liten"

$$\frac{b-a}{2^{i+1}|m_i|} < \varepsilon$$

Nå kan $m_i \approx 0$, så bedre å kjøre til

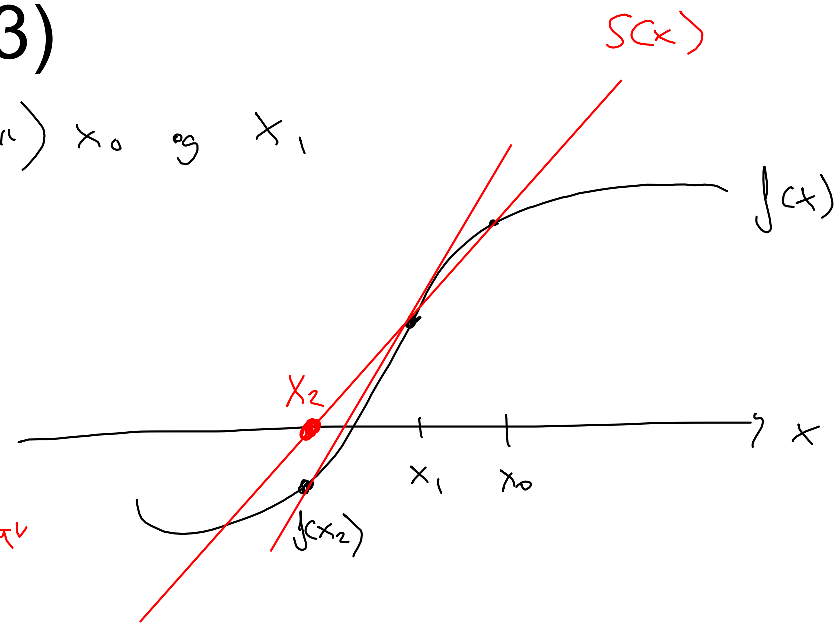
$$b-a < \varepsilon \cdot |m_i| \cdot 2^{i+1}$$

Kan vise at antall ~~k~~korrekte bits i m_i øker med 1 per iterasjon.

$\Rightarrow$ Full nøyaktighet etter $N = 24$ iterasjoner med 32 bits flyttall

$N = 54$ —"— 64 —"—

Sekantmetoden (10.3)



Gitt f og to startverdier (tilnærminger) x_0 og x_1

(1) Finn lineær tilnærming, sekanten, $S(x)$ som interpolerer f i x_0 og x_1

(2) Finn x_2 slik at $S(x_2) = 0$

Bruker x_2 som tilnærmet løsning av

$f(x) = 0$

istedenfor x_0

Gjenta til vi (forhåpentligvis) har en god nok løsning

Detaljer: kan skrive $S(x)$ som

$$S(x) = f(x_1) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x_1 - x)$$

Sjekk:

$S(x_1) = f(x_1)$

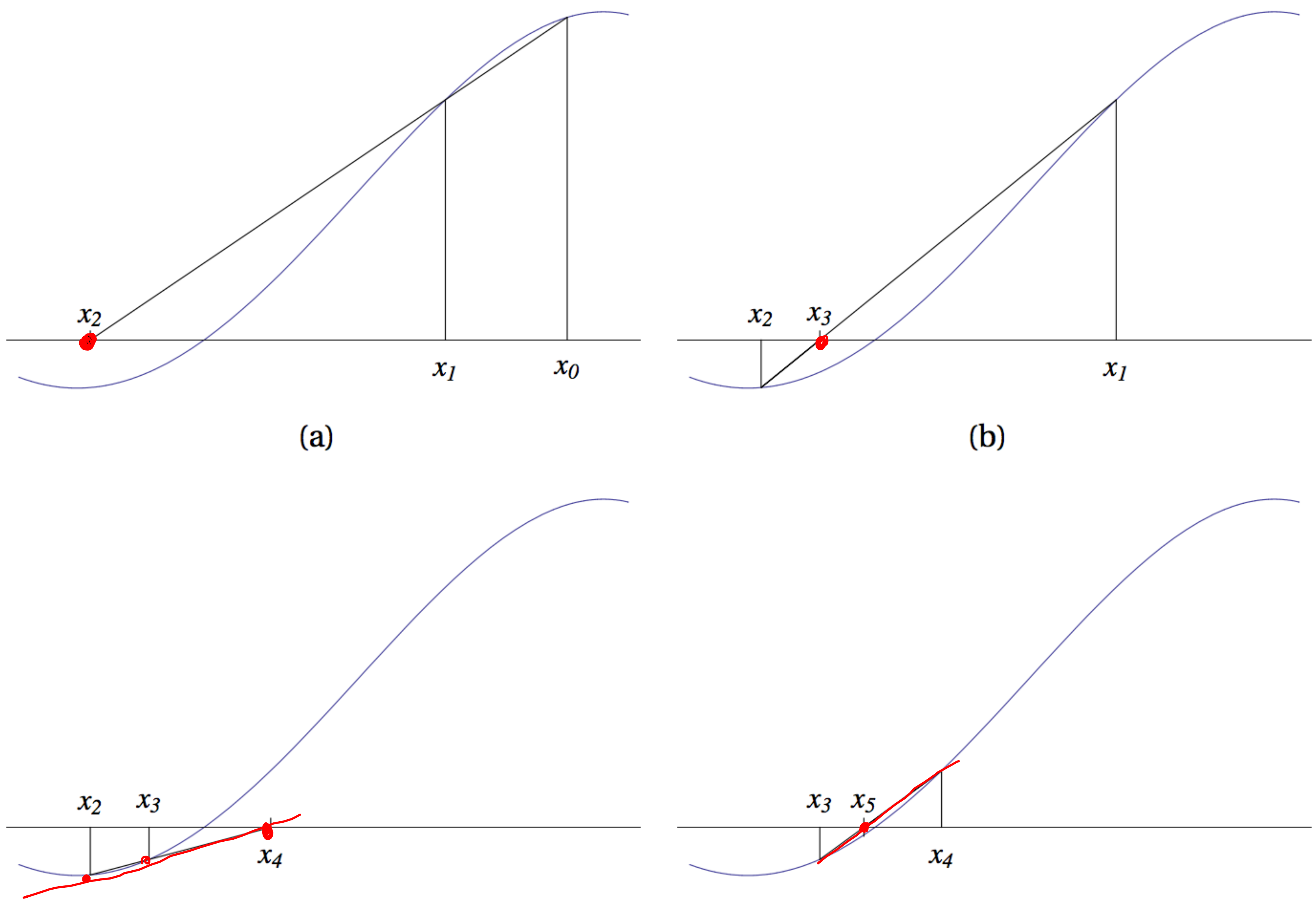
$S(x_0) = f(x_0)$

Set at $S(x) = 0$ for

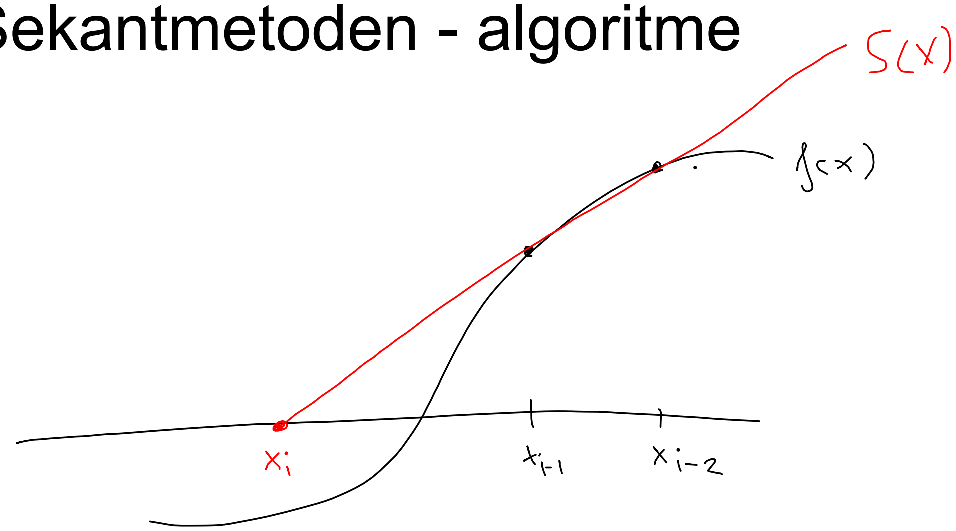
$$x_2 = \boxed{x = x_1 - \frac{x_1 - x_0}{f(x_1) - f(x_0)} f(x_1)}$$

Gjentar algoritmen for $x_2, x_3, x_4, \ldots$

Sekantmetoden (10.3)



Sekantmetoden - algoritme



Algoritme 10.11:

$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})} \cdot f(x_{i-1}) \qquad i = 2, \ldots, N$$

Sekvensen $x_2, x_3, x_4, \ldots$ vil i noen tilfeller konvergere til en løsning av $f(x) = 0$

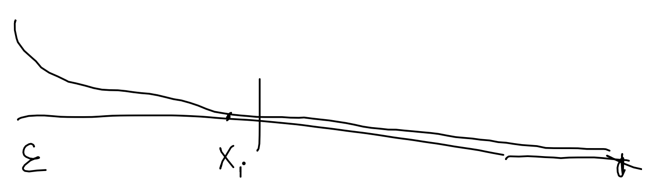
Kan f.eks stoppe når relativ feil er liten nok

$$\frac{|x_i - c|}{|c|} \approx \frac{|x_i - c|}{|x_i|} \approx \frac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|} \le \varepsilon \quad (\text{f.eks } 10^{-10})$$

For å unngå problemer med $x_i \approx 0$, stopp når

$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon \cdot |x_i|$$

Ingen god ide å stoppe når $|f(x_i)| < \varepsilon$



Sekantmetoden kan feile