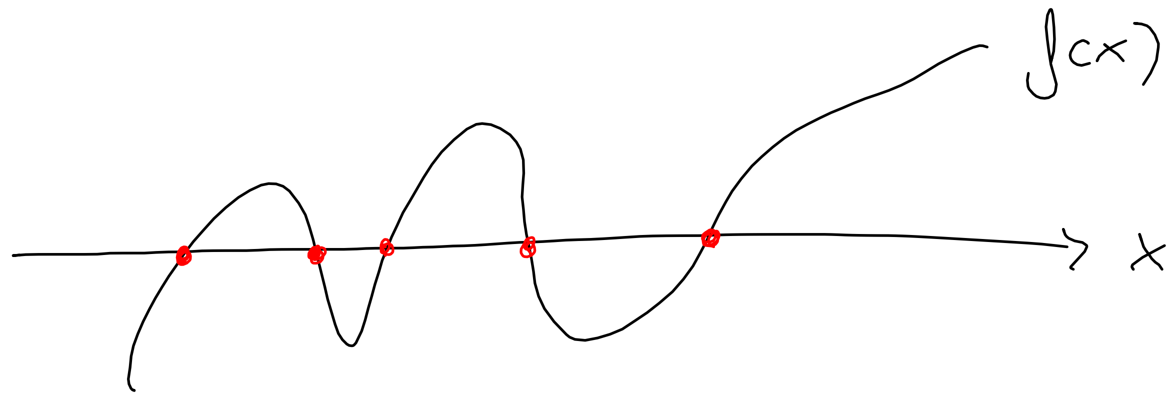
Løsning av ligninger (kap 10 i kompendiet)

(Sist)

Veldig mange problemer kan formuleres som

$$f(x) = 0$$



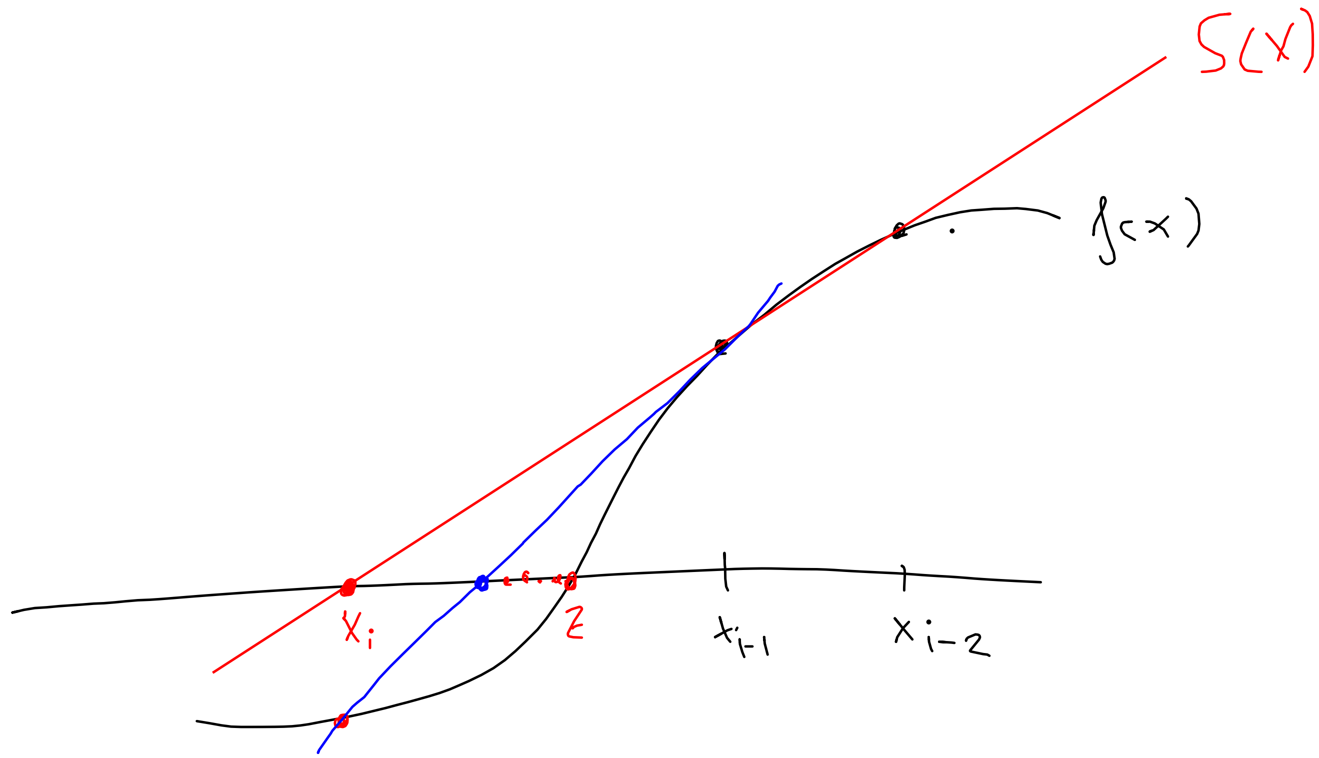
Dvs. finn $x \in \mathbb{R}$ slik at $f(x) = 0$

Hvordan?

1. Finn formel / oppskrift. Funker sjelden for ikketrivielle problemer.

2. Finn numeriske tilnærminger til løsninger, med ønsket nøyaktighet. Fungerer „alltid".

Sekantmetoden - algoritme



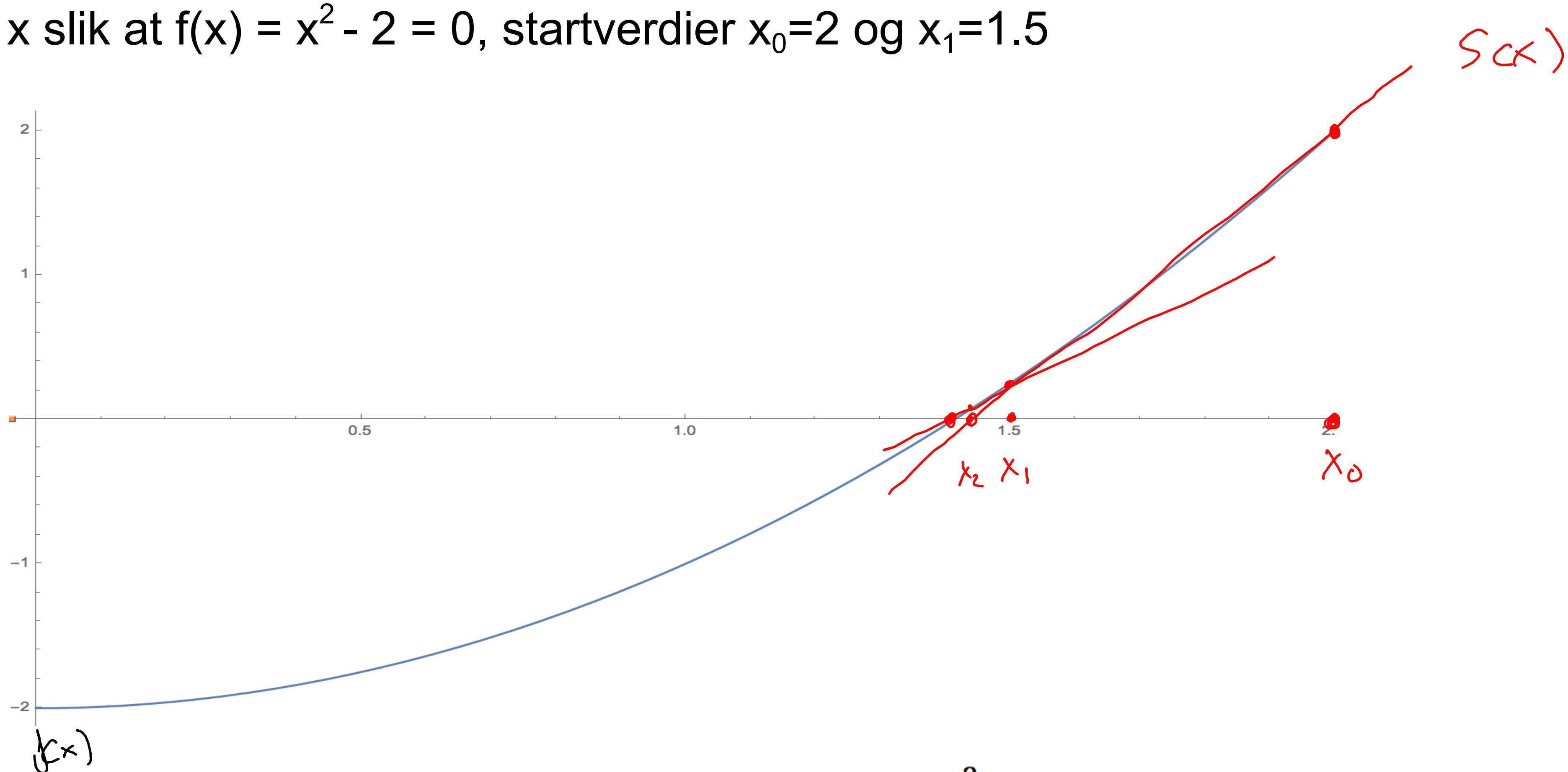
Algoritme 10.11: Gitt startverdier x_0, x_1

$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1} - x_{i-2}}{f(x_{i-1}) - f(x_{i-2})} \cdot f(x_{i-1}) \qquad i = 2, \dots, N$$

Sekvensen $x_2, x_3, x_4 \dots$ konvergerer forhåpentligvis til en løsning av $f(x) = 0$

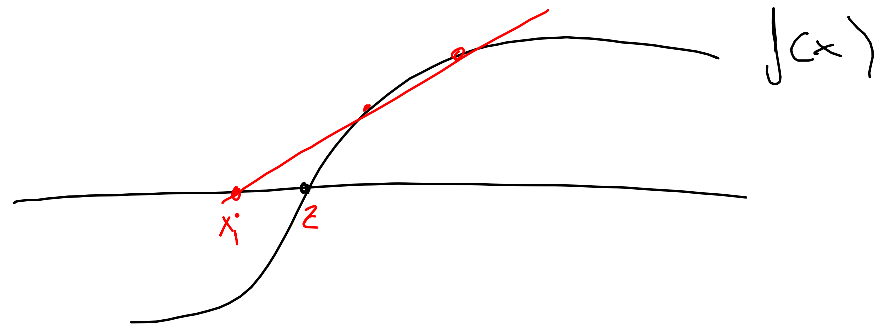
Sekantmetoden - eksempel

Finn x slik at $f(x) = x^2 - 2 = 0$, startverdier $x_0=2$ og $x_1=1.5$



$$
\begin{aligned}
x_2 &\approx 1.42857142857142857, & e_2 &\approx 1.4\times10^{-2},\\
x_3 &\approx 1.41463414634146341, & e_3 &\approx 4.2\times10^{-4},\\
x_4 &\approx 1.41421568627450980, & e_4 &\approx 2.1\times10^{-6},\\
x_5 &\approx 1.41421356268886964, & e_5 &\approx 3.2\times10^{-10},\\
x_6 &\approx 1.41421356237309529, & e_6 &\approx 2.4\times10^{-16}.
\end{aligned}
$$

Sekantmetoden - konvergens og feil



Skal se på feilen (absolutt)

$$e_i = z - x_i$$

Dersom følgen $x_2, x_3, x_4, \ldots$ konvergerer til en løsning z

og $f'(z) \neq 0$ så kan vi vise at

$$\boxed{|e_i| \leq K \cdot |e_{i-1}|^r}$$

hvor $r = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) \approx 1.618$

og $K > 0$ er en konstant

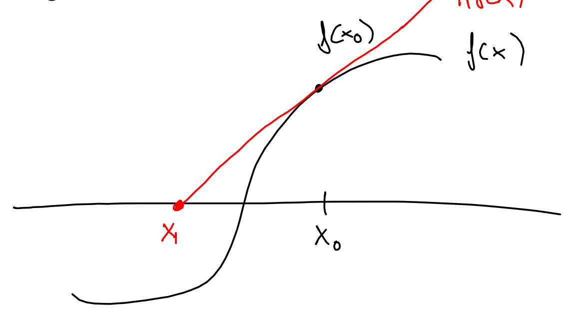
Betyr at antall korrekte desimale siffer øker med 61.8 % i hvert iterasjon

Vi sier at metoden har konvergens-rate 1.618... .

Newtons metode (10.4)

Gitt f og en startverdi: x_0

$T_1 f(x)$ – tangenten eller Taylor 1. ordens tilnærming om x_0



Ide: Bruk Taylor 1. ordens tilnærming

(1) Finn $T_1 f(x)$

(2) Finner x slik at $T_1 f(x) = 0$

Bruker $x_1 = x$ som ny startverdi

Gjenta for $x_2, x_3, x_4, \ldots$ til vi forhåpentligvis har en god tilnærming til en løsning av $f(x) = 0$

Detaljer: (1) $T_1 f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0)$

(2) Løs $T_1 f(x) = 0$

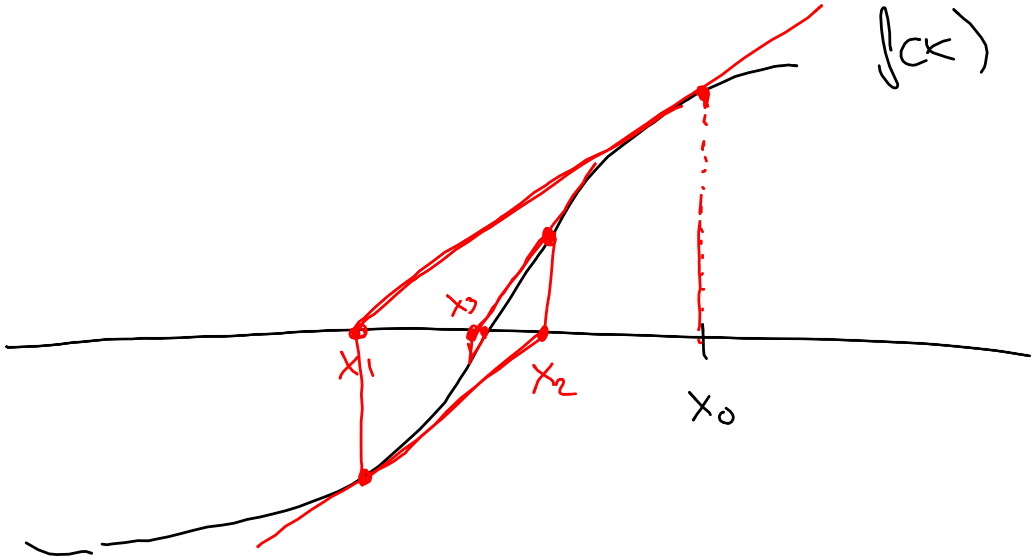
$$f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) = 0$$

$$\Rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

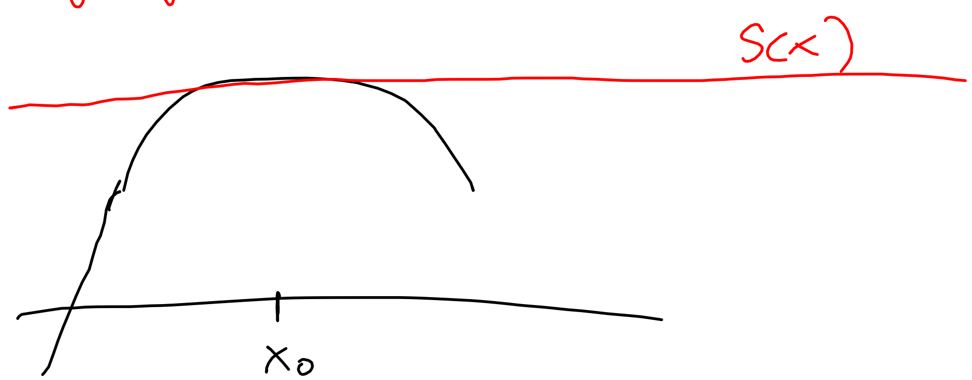
(Nullpunktet til $T_1 f(x)$)

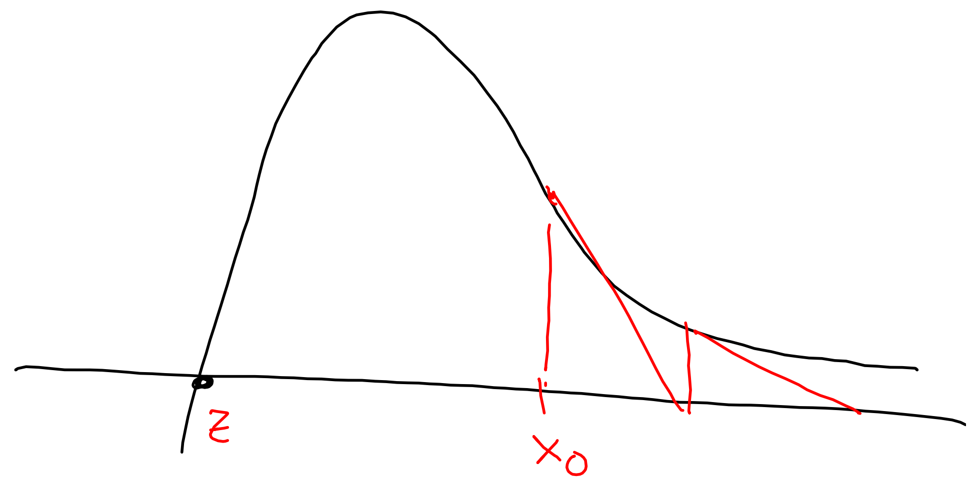
Bruker $x_1 = x$ som ny startverdi og gjentar til vi er fornøyd

Eksempel

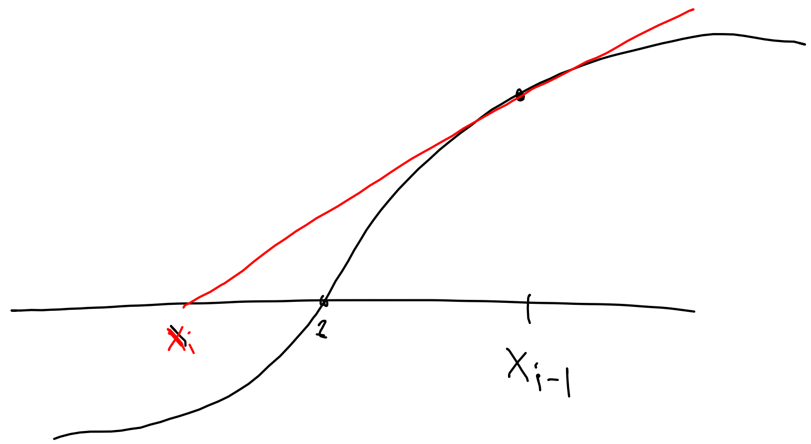


Hvor kan gå galt ?





Newtons metode - algoritme



Algoritmen : Gitt f og x_0

Regn ut

$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})} \qquad \text{for } i = 1, 2, 3, \ldots N$$

Vi håper at følgen konvergerer til nullpunkt z.

Når skal vi stoppe? Vanlig å bruke relativ feil, stoppe når

$$\frac{|x_i - x_{i-1}|}{|x_i|} < \varepsilon \qquad (\text{f.eks } 10^{-10})$$

eller (bedre) når

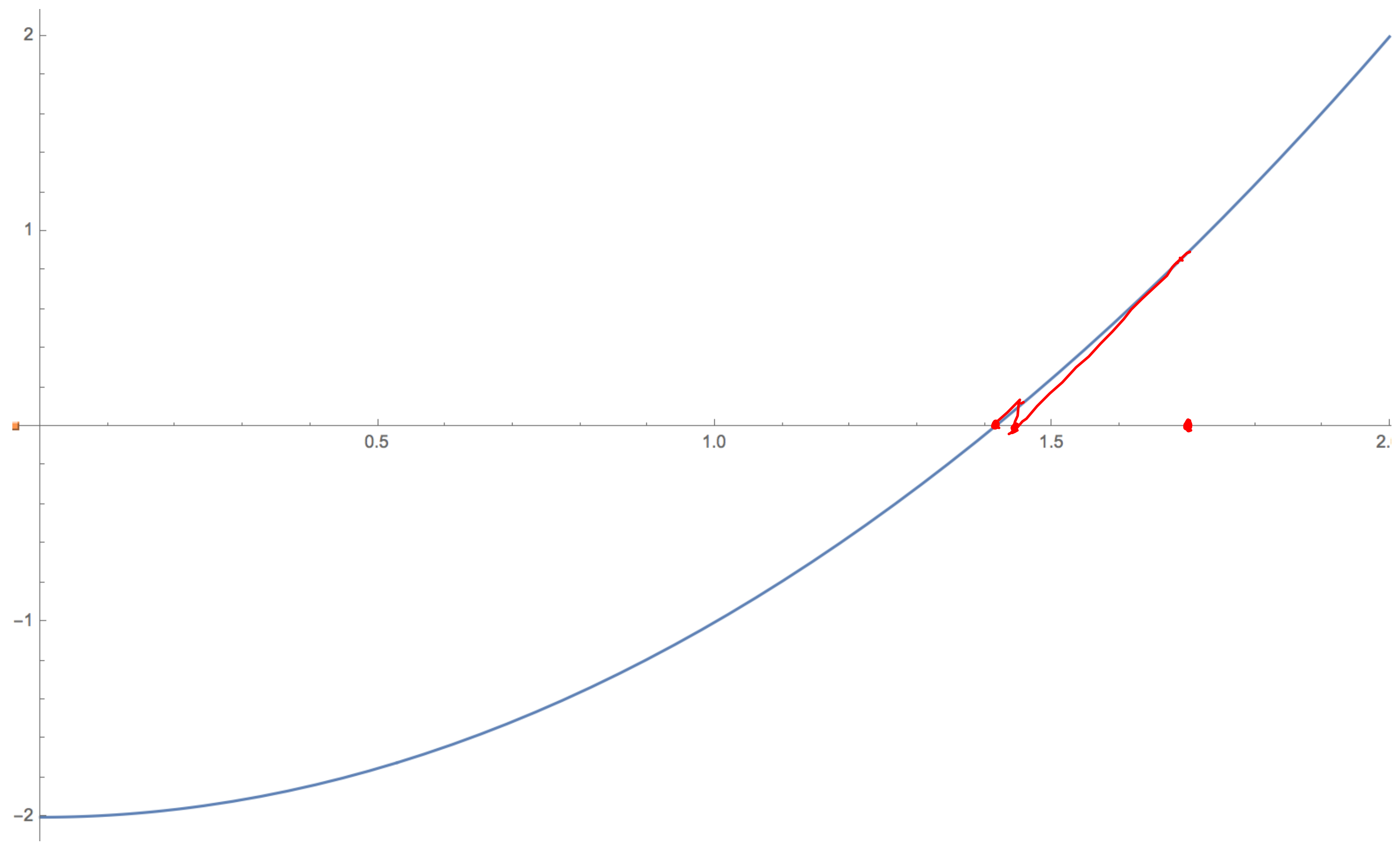
$$|x_i - x_{i-1}| < \varepsilon \cdot |x_i|$$

Newtons metode - algoritme

```
def newton(f,Df,xn,n):
    for k in range(1,n+1):
        z = xn - f(xn)/Df(xn)
        if (fabs(z-xn)<fabs(z)*10**-10):
            break
        xn = z
    return z
```

Newtons metode - eksempel

Finn x slik at $f(x) = x^2 - 2 = 0$, startverdi x_0=1.7



$$
\begin{aligned}
x_1 &\approx 1.43823529411764706, & e_2 &\approx 2.3 \times 10^{-1},\\
x_2 &\approx 1.41441417057620594, & e_3 &\approx 2.4 \times 10^{-2},\\
x_3 &\approx 1.41421357659935635, & e_4 &\approx 2.0 \times 10^{-4},\\
x_4 &\approx 1.41421356237309512, & e_5 &\approx 1.4 \times 10^{-8},\\
x_5 &\approx 1.41421356237309505, & e_6 &\approx 7.2 \times 10^{-17}.
\end{aligned}
$$

Newtons metode - feil og konvergens

Fra Taylors feilledd $R_1(x)$ kan vi utlede

$$e_{i+1} = \frac{f''(c)}{2f'(x_i)} e_i^2 \quad \text{for en } c \in (z, x_i)$$

Kan fra dette utlede at når Newtons metode konvergerer til et nullpunkt z hvor $f'(z) \neq 0$ så

$$|e_{i+1}| \leq K \cdot |e_i|^2 \quad \text{hvor } K > 0 \text{ er en konstant.}$$

Newtons metode har konvergensrate 2

Dette innebærer at antall korrekte desimale siffer dobler seg i hver iterasjon.

Grovt sett: Newton konvergerer hvis f, f' og f'' er kontinuerlige rundt z og startverdien x_0 er nær nok z.

Sammenligning Sekant- og Newton

Finn x slik at $f(x) = x^2 - 2 = 0$

Feil i sekant-met. Feil i Newton

```
it=1, err_sec = 1.4e-02, err_newt=2.5e-03
it=2, err_sec = 4.2e-04, err_newt=2.1e-06
it=3, err_sec = 2.1e-06, err_newt=1.6e-12
it=4, err_sec = 3.2e-10, err_newt=0.0e+00
it=5, err_sec = 2.2e-16, err_newt=2.2e-16
it=6, err_sec = 0.0e+00, err_newt=0.0e+00
it=7, err_sec = 2.2e-16, err_newt=2.2e-16
it=8, err_sec = 2.2e-16, err_newt=0.0e+00
```

Representasjon av symboler/tegn (4.3)

Bruker tabeller for å oversette fra heltall til symboler.

ASCII : Symboler som bruker 7 bits, 128 stykker.
Typisk engelske bokstaver og tegn

ISO LATIN : UTVIDELSE AV ASCII MED 1 bit, totalt 8
256 tegn
kan f.eks ta med Æ, Ø, Å,

UNICODE : UTVIDELSE AV ASCII OG ISO-LATIN
KJEMPETABELL MED ca 136.000 tegn (stadig nye)
TRENGER 4 bytes for „tå" unicode

UTF8 ENKODING : VARIABEL LENGDE ENKODING
Ascii symboler trenger kun 1 byte
ISO-LATIN trenger to bytes