Inhomogene differensligninger

Eks. Anta at vi har 100 000 i banken til 2 % rente. Hvis x_n angir beløp etter n år er $x_{n+1} = x_n \cdot 1{,}02 = x_n + 0.02 \cdot x_n$

Hvis vi tar ut 5000 kr pr. år får vi i stedet

$$x_{n+1} = 1{,}02 x_n - 5000$$

$$x_{n+1} - 1{,}02 x_n = -5000$$ – inhomogen differensligning

Inhomogene andreordens differensligninger.

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = f(n) \quad , \quad b, c \in \mathbb{R}$$

der $f(n)$ er en funksjon av n.

Lemma. Anta at x_n^p er en løsning av

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = f(n)$$

Da er de andre løsningene gitt ved

$$x_n = x_n^p + x_n^h$$

der x_n^h er en vilkårlig løsning av

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$$

Eksempel $x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = -6n + 1 \quad , \quad n \in \mathbb{N}$

Homogen ligning $x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = 0$

Kar. pol. $r^2 - r - 6 = 0$

Røtter: $r_1 = -2 \quad , \quad r_2 = 3$

Generell løsn. av homogen lign er

$$x_n^h = C(-2)^n + D\,3^n$$

For å finne en løsning av den inhomogene ligningen prøver vi med en løsning på samme form som høyresiden.

$$x_{n+2} - x_{n+1} - 6x_n = -6n + 1$$

Prøver med $x_n^p = \boxed{An + B}$, $x_{n+2}^p = A(n+2) + B$, $x_{n+1}^p = A(n+1) + B$

$$x_{n+2}^p - x_{n+1}^p - 6x_n^p$$

$$= A(n+2) + B - (A(n+1) + B) - 6(An + B)$$

$$= -6An + A - 6B = -6n + 1$$

$$(-6A)n + A - 6B = (-6)n + 1$$

Må ha $-6A = -6 \quad , \quad A - 6B = 1$

så $A = 1 \quad , \quad 1 - 6B = 1 \quad ,$ så $B = 0$

$$x_n^p = n$$

Dermed er total løsning

$$x_n = x_n^p + x_n^h = n + C(-2)^n + D\,3^n$$

Hvis $x_0 = 1$ og $x_1 = 0$ får vi

$$1 = x_0 = 0 + C \cdot 1 + D \cdot 1 = C + D$$

$$0 = x_1 = 1 + C(-2) + D \cdot 3$$

$$\left.\begin{aligned} C + D &= 1 \\ -2C + 3D &= -1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow D = 2/5 \quad , \quad C = 3/5$$

Endelig løsning

$$x_n = n + \frac{3}{5}(-2)^n + \frac{2}{5} \cdot 3^n$$

Eks 6.25 i komp.

$$(*)\quad x_{n+2} - \frac{19}{3}x_{n+1} + 2x_n = -10 \quad , \quad x_0 = 2, \quad x_1 = 8/3$$

Homogen ligning

$$x_{n+2} - \frac{19}{3}x_{n+1} + 2x_n = 0$$

Kar. lign. $r^2 - \frac{19}{3}r + 2 = 0$

Får $r_1 = 1/3$, $r_2 = 6$

Homogen løsning er $x_n^h = C \cdot 3^{-n} + D\,6^n$

Partikulærløsning av $(*)$.

Prøver med løsning på samme form som høyre side: $x_n^p = A$. , $x_{n+2}^p = A$, $x_{n+1}^p = A$

Setter inn

$$A - \frac{19}{3}A + 2A = -10$$

$$-\frac{16}{3}A = -10 \quad , \quad A = 3$$

$$x_n = 3 + C\,3^{-n} + D\,6^n \quad , \quad x_0 = 2, \quad x_1 = 8/3$$

$$\left.\begin{aligned} 2 &= x_0 = 3 + C + D \\ 8/3 &= x_1 = 3 + C/3 + D \cdot 6 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C = -1, \; D = 0$$

$$x_n = 3 - 3^{-n} .$$

Simulering av samme ligning:

$$x_{n+2} = -10 + \frac{19}{3} x_{n+1} - 2x_n \,, \quad x_0 = 2 \,, \quad \boxed{x_1 = 8/3}$$

$x_0 = 2, \; x_1 = 8/3,$

for $n = 2, 3, 4, \ldots, N$

$$x_n = -10 + \frac{19}{3} x_{n-1} - 2 x_{n-2}$$

Forklaring på ~~hvorfor~~ det går galt:

$x_1 = 8/3$ kan ikke representeres eksakt.

Vi får isteden $x_1 = 8/3 + \varepsilon, \quad |\varepsilon| \sim 10^{-16}$

$x_0 = 2$ er OK.

Dette svarer til at vi får løsningen bestemt ved

$$x_n = 3 + C 3^{n} + D 6^{n}$$

$$\left.\begin{aligned} 2 = x_0 &= 3 + C + D \\ 8/3 + \varepsilon = x_1 &= 3 + \frac{C}{3} + 6D \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C &= -1 - 3/17\, \varepsilon \\ D &= \frac{3}{17}\varepsilon \end{aligned}$$

Det vi simulerer er altså

$$\tilde{x}_n = 3 - (1 + 3/17\,\varepsilon) 3^{-n} + \frac{3}{17}\varepsilon\, 6^{n} \,, \quad |\varepsilon| \sim 10^{-16}$$

Når n blir stor vil $6^n >> 10^{16}$ så siste ledd vil dominere løsningen.