Systemer av differensialligninger.

Vi har sett på metoder for å løse

$$x' = f(t,x), \quad x(a) = x_0$$

Eulers metode: $x_{k+1} = x_k + h f(t_k, x_k)$.

Hva om vi har følgende:

$$\text{I} \quad x' = xy + \cos z, \quad x(0) = x_0$$
$$\text{II} \quad y' = 2 - t^2 + z^2 y, \quad y(0) = y_0$$
$$\text{III} \quad z' = \sin t - x + y, \quad z(0) = z_0$$

Her er $x = x(t)$, $y = y(t)$ og $z = z(t)$ ukjente funksjoner og x_0, y_0, z_0 gitte tall.

Vi setter $\bar{x} = (x, y, z)$, $\bar{x}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\text{I}: \quad x' = f_1(t, \bar{x}) = f_1(t, x, y, z) = xy + \cos z \qquad \bar{x}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$\text{II}: \quad y' = f_2(t, \bar{x}) = f_2(t, x, y, z) = 2 - t^2 + z^2 y$$
$$\text{III}: \quad z' = f_3(t, \bar{x}) = f_3(t, x, y, z) = \sin t - x + y$$

Startverdi $\bar{x}(0) = \bar{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$

Dermed kan I, II, III skrives

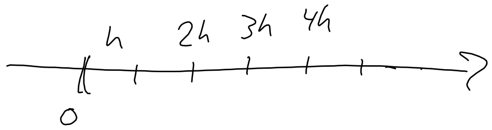
$$\boxed{\bar{x}' = \bar{f}(t, \bar{x}), \quad \bar{x}(0) = \bar{x}_0}$$

der $\bar{f}(t, \bar{x}) = (f_1(t, \bar{x}), f_2(t, \bar{x}), f_3(t, \bar{x}))$

Nå kan vi bruke Eulers metode:

$$\bar{x}_{k+1} = \bar{x}_k + h \bar{f}(t_k, \bar{x}_k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$t_k = k \cdot h$, $t_0 = 0$



Høyere ordens ligninger
som et system av 1. ordens lign.

Eks. 13.27 i komp:

(*) $x'' = t^2 + \sin(x + x')$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$

Vi ønsker å løse dette med Euler:

Vi innfører $\boxed{x_2 = x'}$, $x_2(t) = x'(t)$. Da er

$x_2'(t) = x''(t)$. Da kan vi skrive (*) som

$$x'' = x_2' = t^2 + \sin(x + x_2)$$

Sett $x_1 = x$. Da kan vi skrive

$$x_1' = x_2 \quad , \quad x_1(0) = 1$$

$$x_2' = t^2 + \sin(x_1 + x_2), \quad x_2(0) = 0$$

Løsning av differentialligninger
med formel Kap. 10 i Kalkulus

Førsteordens lineære ligninger er på formen

$y' + f(x)y = g(x)$, $y(x)$ - ukjent funksjon.

Ex. $y' + 2xy = x$

Sett $f(x) = 2x$ og $F(x) = \int f(x) = \int 2x = x^2$

Multipliser med $e^{F(x)} = e^{x^2}$

$$e^{x^2} y' + e^{x^2} 2x\, y = x e^{x^2}$$

$$(e^{x^2} y)' = x e^{x^2}$$

$$e^{x^2} y = \int x e^{x^2} = \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$y(x) = e^{-x^2}\left(\frac{1}{2} e^{x^2} + C\right)$$

$$= \frac{1}{2} + C \cdot e^{-x^2}$$

Anta $y(0) = 1$. Da får vi

$$1 = y(0) = \frac{1}{2} + C e^{0} = \frac{1}{2} + C, \quad C = \frac{1}{2}$$

Dermed er $y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-x^2}$

Separable ligninger.

Ex. 10.9.1

$$e^{-x} y' = 1 + y^2$$ - ikke lineær ligning

Dette kan skrives som

$$\frac{y'}{1+y^2} = e^x$$

Integrerer på begge sider:

$$\boxed{\int \frac{y'(x)}{1+y^2(x)}\,dx} = \int e^x\,dx = e^x + C$$

$u = y(x)$, $du = y'(x)\,dx$

$$\int \frac{du}{1+u^2} = \arctan u = \arctan y(x)$$

$$\arctan y(x) = e^x + C$$

tan på begge sider gir

$$y(x) = \tan(e^x + C)$$

Generelt for separable ligninger.

Dette er ligninger på formen

$$q(y) \cdot y' = p(x)$$

Integrerer på begge sider

$$\boxed{\int q(y)\, y' dx} = \int p(x)\, dx$$

$u = y(x)$, $du = y'(x)dx$

$$\int q(u)\, du = P(x) + C$$

Anta at $\int q(u)du = Q(u)$. Da er

$$Q(u) = Q(y(x)) = P(x) + C$$

Løs så for $y(x)$.

Ex. $e^{-x} y y' = -1, \quad y(0) = 4.$

$$y y' = -e^{x} \qquad y' = \frac{e^{x}}{y} = f(x,y)$$

$$\tfrac{1}{2}y^2 = \int y y' = -\int e^{x} = -e^{x} + C$$

$$y^2 = 2C - 2e^{x}$$

$$y(x) = \pm\sqrt{D - 2e^{x}}, \quad D = 2C.$$

To løsninger! Negativ løsning går ikke pga. startverdi (>0).

$$y(x) = \sqrt{D - 2e^{x}},$$

$$4 = y(0) = \sqrt{D - 2e^{0}} = \sqrt{D-2}$$

$$16 = D - 2, \quad D = 18$$

$$y(x) = \sqrt{18 - 2e^{x}}$$