Løsning av ligninger

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Løsning

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Veldig mange problemer som kan skrives som

$$f(x) = 0 \qquad x \in \mathbb{R}$$

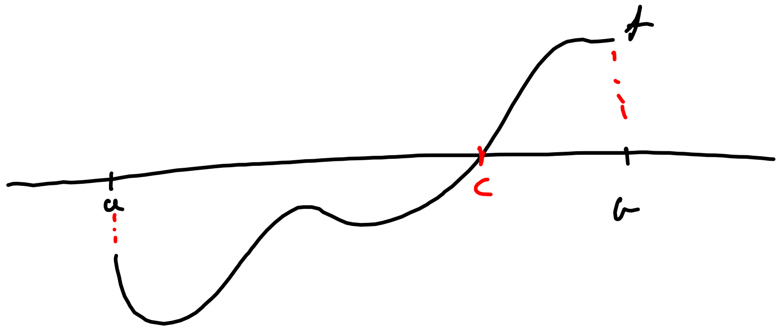
Hvordan finner vi $x \in \mathbb{R}$ slik at $f(x) = 0$

Fra kalkulus har vi

## 5.2.1 Skjæringssetningen

Anta $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ er en kontinuerlig funksjon hvor $f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn.

Da finnes et tall $c \in (a,b)$ slik at $f(c)=0$



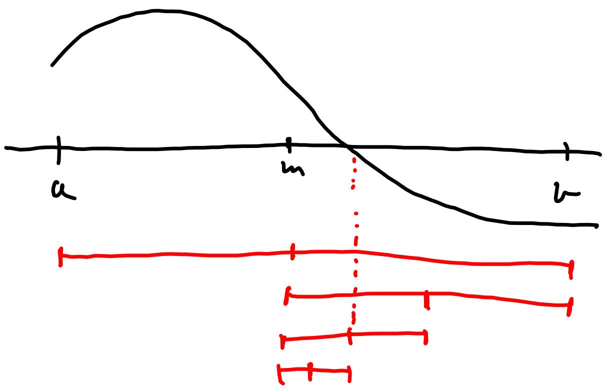
## Halveringsmetoden

Ide: Deler intervallet $[a, b]$ på midten

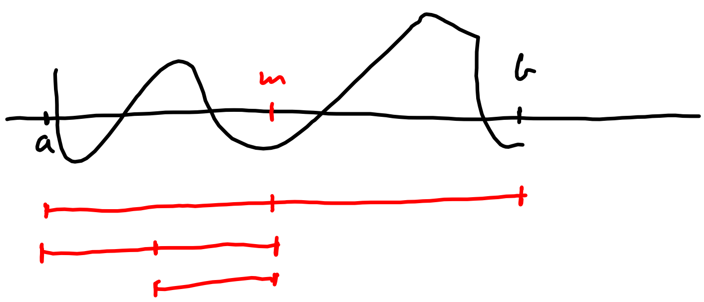
$$m = \frac{a+b}{2}$$

Får to intervaller $[a, m]$ og $[m, b]$

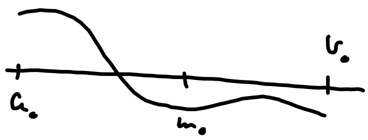
Hvis $f$ er kontinuerlig og $f(a)$ og $f(b)$ har motsatt fortegn må et av disse intervallene inneholde en løsning.




Velger det intervallet hvor funksjonsverdien av endepunktene har motsatt fortegn. Gjentar dette til intervallet blir lite nok.



## Algoritme 10.2




$a_0 = a$

$b_0 = b$

for $i = 1, 2, 3, \dots N$

$$m_{i-1} = \frac{a_{i-1} + b_{i-1}}{2}$$

if $f(m_{i-1}) == 0$

Vi har funnet en løsning

$a_i = b_i = m_{i-1}$

if $f(a_{i-1})\, f(m_{i-1}) < 0$

$a_i = a_{i-1}$

$b_i = m_{i-1}$

else

$a_i = m_{i-1}$

$b_i = b_{i-1}$

$$m_N = \frac{a_N + b_N}{2}$$

## Feilanalyse halveringsmetoden

La $c \in \mathbb{R}$ være et nullpunkt til funksjonen $f$, altså er $f(c) = 0$

Absolutt feil

$$|c - m| < \frac{b-a}{2}$$


Etter $N$ steg (halveringer) er

$$|c - m_N| < \frac{b-a}{2^{N+1}}$$

Hvis vi ønsker feil mindre enn $\varepsilon > 0$ (f.eks $\varepsilon = 10^{-10}$)

hvor mange iterasjoner trenger vi?

$$\frac{b-a}{2^{N+1}} < \varepsilon$$

$$\frac{b-a}{\varepsilon} < 2^{N+1}$$

$$\ln\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) < \ln 2^{N+1}$$

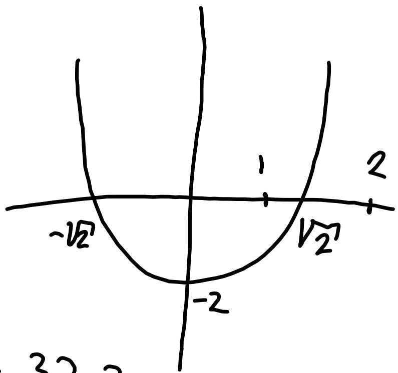
$$\ln(b-a) - \ln(\varepsilon) < (N+1)\ln 2$$

$$\boxed{N > \frac{\ln(b-a) - \ln(\varepsilon)}{\ln 2} - 1}$$

Eksempel

$f(x) = x^2 - 2$    Løsning $x = \sqrt{2}$ og $x = -\sqrt{2}$

$[a, b] = [1, 2]$




Setter $\varepsilon = 10^{-10}$

hvor mange iterasjoner trenger vi?

$$\frac{\ln(b-a) - \ln\varepsilon}{\ln 2} - 1 = \frac{\ln(1) - \ln 10^{-10}}{\ln(2)} \approx 32{,}2$$

Vi må altså bruke $N \geq 33$ iterasjoner for å få en absolutt feil mindre enn $10^{-10}$.

Relativ feil

$$\frac{|c - m_N|}{|c|} < \frac{b-a}{2^{N+1}|c|} \approx \frac{b-a}{2^{N+1}|m_N|}$$

Kjører halveringsmetoden til feilen blir liten

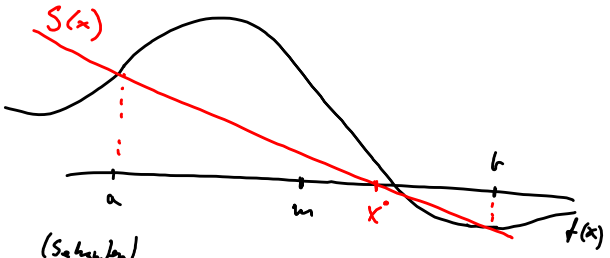
$$\frac{b-a}{2^{i+1}|m_i|} \leq \varepsilon$$

Hva skjer om $m_i = 0$

Bruker

$$\frac{b-a}{2^{i+1}} \leq \varepsilon |m_i|$$

## Sekantmetoden




(Sekanten)

Finner linje som interpolerer $f$ i punktene $(a, f(a))$ og $(b, f(b))$.

Sekanten er da gitt ved

$$S(x) = f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

Finner $x^*$ slik at $S(x^*)=0$

$$x^* = a - \frac{a-b}{f(a)-f(b)} f(a)$$

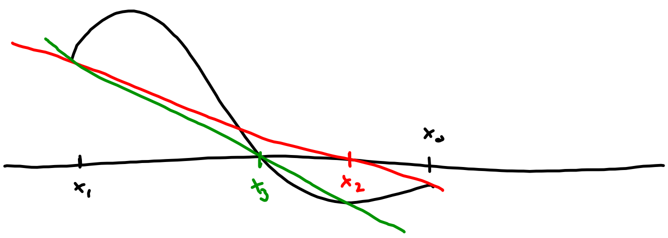
### Algoritme

$x_0 = b$

$x_1 = a$

for $i = 2, 3, \ldots N$

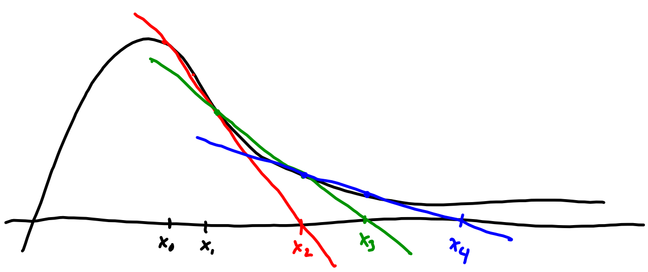
$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1}-x_{i-2}}{f(x_{i-1})-f(x_{i-2})} f(x_{i-1})$$




### Merk

① I sekantmetoden trenger vi ikke ha motsatt fortegn på $f(x_{i-1})$ og $f(x_{i-2})$

② Sekantmetoden kan feile.



## Konvergens av sekantmetoden

Skal se på (absolutt) feil

$$e_n = c - x_n$$

Dersom følgen $x_2, x_3 \ldots$ konvergerer til en løsning $c$ i intervallet $I$ og $|f'(x)| > 0$ for alle $x \in I$ så kan vi vise at

$$|e_n| \leq K\, |e_{n-1}|^r \qquad \text{hvor } r = \tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \approx 1{,}618$$

og $K > 0$ er en konstant.

Betyr at antall korrekte desimale siffer øker med ca. 61,8 % i hver iterasjon.

$K = 1 \qquad e_n = 10^{-10}$

$$e_{n+2} \lesssim (e_{n+1})^r \lesssim e_n^{r^2} = 10^{-10 r^2}$$