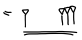
<u>Repetisjon</u>: Vi lar $\beta \geq 2$ være et heltall (grunntallet). I β-tallsystemet kan vi skrive et vilkårlig heltall $a \in \mathbb{Z}$ på en <u>unik</u> måte:

$$a = (d_k d_{k-1} \cdots d_0)_\beta = \sum_{i=0}^{k} d_i \beta^i, \quad \text{der } d_i \in \{0,1,\dots,\beta-1\}.$$

<u>Retfelse</u>: $3603 = 1 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 3 \cdot 1$

= 

<u>3.3 Representasjon av desimaltall</u>

La $a \in \mathbb{R}$. Vi kan anta at $a > 0$. Vi kan skrive

$$a = \underbrace{\lfloor a \rfloor}_{\text{heltall}} + \underbrace{(a - \lfloor a \rfloor)}_{\in [0,1)}.$$

Vi vet hvordan $\lfloor a \rfloor$ uttrykkes, så vi kan anta at

$$a \in (0,1)$$

<u>Eks</u>:
$$0{,}5137 = 5 \cdot 10^{-1} + 1 \cdot 10^{-2} + 3 \cdot 10^{-3} + 7 \cdot 10^{-4}$$
$$= 5 \cdot \beta^{-1} + 1 \cdot \beta^{-2} + 3\beta^{-3} + 7\beta^{-4}$$
$$= \sum_{i=1}^{4} d_{-i} \beta^{-i},$$

der $d_{-1} = 5$, $d_{-2} = 1$, $d_{-3} = 3$, $d_{-4} = 7$. □

Et fraksjonell tall $a \in (0,1)$ skriver vi som

$$a = (0, d_{-1} d_{-2} \cdots d_{-k})_\beta = \sum_{i=1}^{k} d_{-i} \beta^{-i}.$$

<u>Eks</u>: $\frac{1}{3} = 0{,}3333\cdots_{10}$

Vi kan trenge uendelig mange sifre:

$$\sum_{i=1}^{\infty} d_{-i} \beta^{-i} = d_{-1}\beta^{-1} + d_{-2}\beta^{-2} + \cdots$$

Det minste tallet på denne formen er

$$0 = (0{,}0000\cdots)_\beta.$$

Det største tallet får vi når $d_i = \beta - 1$, $i = -1, -2, \dots$ (eks. $a = 0{,}99999\cdots_{10}$). Da er

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} (\beta-1)\beta^{-i} = \frac{(\beta-1)}{\beta} \sum_{i=1}^{\infty} \beta^{-i+1} = \frac{\beta-1}{\beta} \sum_{i=0}^{\infty} \beta^{-i}$$
$$= \frac{\beta-1}{\beta} \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\beta}\right)^i = \frac{\beta-1}{\beta} \frac{1}{1-\frac{1}{\beta}} = \underline{\underline{1}}$$

<u>Lemma</u>: Et tall på formen

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} d_{-i} \beta^{-i}, \quad \text{der } d_{-i} \in \{0,\dots,\beta-1\}$$

ligger i intervallet $[0,1]$.

<u>Eksempel</u>:

Uttrykke $a = 1/6$ i 8-tallsystemet.

Skriv

$$\frac{1}{6} = a = d_{-1} 8^{-1} + d_{-2} 8^{-2} + \cdots$$

Gang med $\beta = 8$:

$$\frac{8}{6} = 1 + \frac{2}{6} = \underbrace{d_{-1}}_{\text{et heltall}} + \underbrace{(d_{-2}8^{-1} + d_{-3}8^{-2} + d_{-4}8^{-3} + \cdots)}_{\in [0,1]}$$

Da <u>må</u> $d_{-1} = 1$. Vi får

$$\frac{2}{6} = d_{-2}8^{-1} + d_{-3}8^{-2} + \cdots$$
$$\Leftrightarrow 2 + \frac{4}{6} = \frac{16}{6} = \underbrace{d_{-2}}_{\text{et heltall}} + \underbrace{(d_{-3}8^{-1} + d_{-4}8^{-2} + \cdots)}_{\in [0,1]}$$

Da må $d_{-2} = 2$.

$\vdots$

$d_{-3} = 5$, $d_{-4} = 2$, ...

$$\rightarrow \frac{1}{6} = \underline{\underline{0{,}1252525\cdots_8}}$$

<u>Teorem 3.15</u>

Ethvert reelt tall $a \in (0,1)$ kan skrives ~~som~~ på en unik måte i β-tallsystemet (så lenge vi utelukker en uendelig følge av sifre $d_i = \beta - 1$).

(<u>Eks</u>: $0{,}129999\cdots_{10} = 0{,}13_{10}$)

<u>Bevis (skisse)</u>:

Som i eksempelet over har vi <u>ikke noe valg</u> når vi bestemmer siffer nr. i $(i = -1, -2, \dots)$. Det er <u>ett</u> unntak: Om vi ender opp med

$$\beta a_i = d_{-i} + \underbrace{(d_{-i-1}\beta^{-1} + d_{-i-2}\beta^{-2} + \cdots)}_{\in [0,1]},$$

der venstre side er et heltall. Vi har to valg:

i) $d_{-i} = \beta a_i$, og $d_{-i-1} = \cdots = 0$

ii) $d_{-i} = \beta a_i - 1$, og $d_{-i-1} = \cdots = \beta - 1$

Alt. ii) er utelukket i teoremet, så også her er sifrene <u>unikt</u> bestemt. ■

<u>Algoritme</u> 3.16

La $a \in (0,1)$ ha $d_{-1}, d_{-2}, \ldots, d_{-k}$ som sine k første sifre i β-tallsystemet. Da kan vi beregne disse som:

for $i = -1, -2, \ldots, -k$

$d_i \leftarrow \lfloor a * \beta \rfloor$

$a \leftarrow a * \beta - d_i$

("$\leftarrow$" betyr "sett verdien til ...").

3.3.5 Rasjonale og irrasjonale tall i β-tallsystemet

La $a \in (0,1)$ være rasjonalt, altså $a = \frac{b}{c}$, der $b, c \in \mathbb{N}$ og $b < c$. Da kan vi forenkle algoritmen over som følger:

Algoritme 3.20
La $a \in (0,1)$, $a \in \mathbb{Q}$, $a = \frac{b}{c}$ for $b, c \in \mathbb{N}$.
Da kan vi beregne de k første sifrene i β-tallsystemet slik:

for $i = -1, -2, \ldots, -k$
  $d_i \leftarrow (b * \beta) // c$
  $b \leftarrow (b * \beta) \% c$

Eksempel: Gjør om $\frac{1}{10} = 0,\ldots_2$

$\frac{3}{4} = 0,\ldots_7$

$$\frac{1}{10} = 0,0001100110011\ldots_2$$

$$\frac{3}{4} = 0,51515\ldots_7$$

b	d_i	$(\beta * b)$
3	5	21
1	1	7
3	5	21
1		

$\square$

Lemma 3.21
La $a \in (0,1)$. Da vil sifrene til a i β-tallsystemet gjenta seg, dvs.

$$a = (0, d_{-1} \cdots d_{-i}\, d_{-i-1} \cdots d_{-i-m}\, d_{-i-1} \cdots d_{-i-m}\, d_{-i-1} \cdots)$$

hvis og bare hvis a er rasjonalt.