Modellering med differensligninger

Eksempel:

Vi setter en boks med drikke i kjøleskapet. Hvor lang tid vil det ta før temperaturen er $10°C$?

La T_n = temp. etter n sekunder, $T_0 = 22$ $(°C)$

$T_{kjøleskap} = 4$

Newtons avkjølingslov: Varmetap per sekund er proporsjonal med temperaturforskjellen:

Varmetap er definert som

$$q_n = -m \cdot c \cdot (\text{endring i temp. over tid})$$
$$= -mc\,(T_{n+1} - T_n)$$

m = masse $= \frac{1}{2}$ kg
c = varmekapasitet $= 4186 \frac{J}{kg \cdot K}$

Newtons avkj. lov sier da at

$$q_n = (\text{konstant}) \cdot (T_n - T_{kjøleskap})$$
$$= h \cdot A \cdot (T_n - T_{kj.})$$

der h = varmeoverføringskoeffisienten, $h \approx 10 \frac{W}{m^2 K}$

A = areal $\approx 438\ cm^2 = 4{,}38 \cdot 10^{-2}\ m^2$.

Setter vi disse sammen får vi

$$-mc(T_{n+1} - T_n) = hA(T_n - T_{kj.}), \qquad T_0 = 22$$

$$\Leftrightarrow \quad T_{n+1} - T_n\underbrace{\left(1 - \frac{hA}{mc}\right)}_{=a} = \underbrace{\frac{hA}{mc}}_{=b} T_{kj.}$$

$$\Leftrightarrow \quad T_{n+1} = aT_n + b, \qquad T_0 = 22$$

Vi gjetter på $T_n^p = C$, en konstant:

$$C \overset{!}{=} aC + b \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{b}{1-a}$$

Den homogene lign. $T_{n+1} = aT_n$ har løsn. $T_n^h = Da^n$.

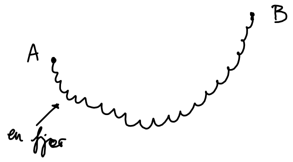
Den generelle løsn. blir da

$$T_n = \frac{b}{1-a} + Da^n.$$

$$T_0 = \frac{b}{1-a} + D \overset{!}{=} 22 \quad \Rightarrow \quad D = 22 - \frac{b}{1-a}.$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{T_n = \frac{b}{1-a} + \left(22 - \frac{b}{1-a}\right)a^n}}$$

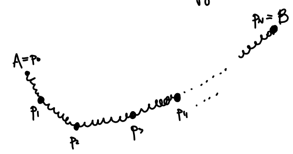
Eksempel:



Hva er kurven som fjæra tegner?

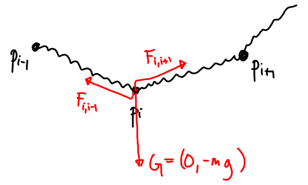
La M = fjæras masse = 0,1 kg
$A = (A^x, A^y)$, $B = (B^x, B^y)$

Vi tilnærmer fjæra med en samling av N små masser, koblet sammen med vektløse fjærer



$m = \frac{M}{N}$ massen til hvert objekt

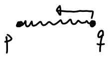
$p_i = (x_i, y_i)$ posisjon til hvert objekt



$g \approx 9{,}81 \frac{m}{s^2}$

Hver partikkel er i ro, så $\boxed{F_{i,i-1} + F_{i,i+1} + G = 0}$

Hookes lov: En fjærs kraft er proporsjonal med dens utstrekning:



$F = k(p-q)$

k = stivheten til fjæra.

Vi får da $\boxed{F_{i,i+1} = k(p_{i+1} - p_i)}$, så

$$k(p_{i-1} - p_i) + k(p_{i+1} - p_i) + G = 0.$$
$$\parallel$$
$$k(p_{i+1} - 2p_i + p_{i-1}) + G.$$

x-komp.: $k(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) = 0$,

eller $x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1} = 0$, $x_0 = A^x$, $x_N = B^x$.

Det kar. pol. er $r^2 - 2r + 1$, med røtter $r = 1$.
Den generelle løsningen er

$$x_i = C1^i + Di1^i = C + Di,$$

$C = A^x$, $D = \frac{B^x - A^x}{N}$, så $x_i = A^x + i\left(\frac{B^x - A^x}{N}\right)$

y-komp.: $k(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) - mg = 0$

$\Leftrightarrow y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = \frac{mg}{k}$, $y_0 = A^y$, $y_N = B^y$

Vi gjetter på en løsning $y_i^p = Ei^2 + Fi + G$. Vi kan sette $F = G = 0$, og få:

$$E(i+1)^2 - 2E(i)^2 + E(i-1)^2 = 2E \overset{!}{=} \frac{mg}{k}$$

$$\Rightarrow E = \frac{mg}{2k}.$$

$$\Rightarrow y_i = \frac{mg}{2k} + Hi + J$$