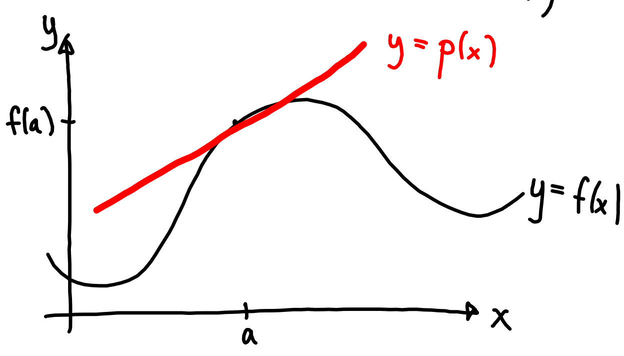
11.1 Taylorpolynomer (Kalkulus)

Tangenten til en funksjon f i punktet a er grafen til funksjonen p,

(1) $\quad p(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$



Om x er nær a, er $p(x)$ nær $f(x)$.

Spm: Kan vi øke graden til polynomet p og få en bedre tilnærming til funksjonen f ?

Obs: Om $p(a) = f(a)$ og $p'(a) = f'(a)$, og p er et 1. gradspol., så er p gitt ved (1).

Skriv $p(x) = b_0 + b_1 x$.

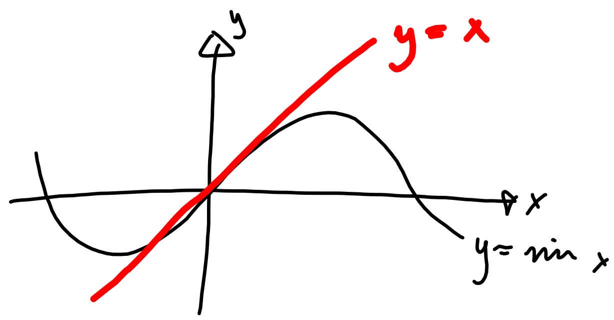
$$p(a) = b_0 + b_1 a \overset{!}{=} f(a) \quad \Rightarrow \quad b_0 = f(a) - b_1 a$$
$$p'(a) = b_1 \overset{!}{=} f'(a)$$

$$\Rightarrow \quad p(x) = (f(a) - f'(a)a) + f'(a)x$$
$$= f(a) + f'(a)(x-a)$$

Eks: $f(x) = \sin(x)$, $\quad a = 0$.

Vi får $f(a) = \sin(0) = 0$ og $f'(a) = \cos(a) = 1$, så

$$p(x) = 0 + 1 \cdot (x - 0) = x$$



Polynomer

Et *polynom* er en funksjon $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som kan skrives på formen

$$p(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n,$$

et n-te grads polynom

der $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$ og $b_0, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$.

Obs: Polynomer kan skrives på forskjellige måter:

$$(x-2)(x+3) = x^2 + x - 6 = (x-1)^2 + 3(x-1) - 4$$

Obs: Polynomer er enkle å evaluere.

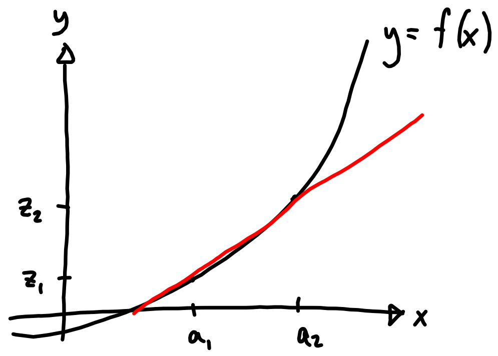
Obs: For å bestemme et n-te grads polynom, trenger vi $n+1$ informasjoner for å bestemme $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

Eks: Finn et førstegradspolynom p slik at

$$p(a_1) = z_1 \quad \text{og} \quad p(a_2) = z_2$$

$$p(x) = \frac{z_2 - z_1}{a_2 - a_1}(x - a_1) + z_1$$

(om $a_1 \neq a_2$).



Merk: - Det er *ingen* p n.a. $p(1) = 2$ og $p(1) = 5$

- Det er *uendelig* mange p n.a. $p(1) = 3$ og $p(1) = 3$.

Taylorpolynomer

Tangenten $p(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ er førstegradspolynomet som oppfyller de to betingelsene $p(a) = f(a)$ og $p'(a) = f'(a)$.

Kan vi generalisere dette til n-tegrads polynomer? Altså finne et n-te gradspol. slik at

$$p(a) = f(a),\ p'(a) = f'(a),\ p''(a) = f''(a), \dots,\ p^{(n)}(a) = f^{(n)}(a)?$$

Lemma

La p og q være n-tegradspolynomer slik at

$$p(a) = q(a),\ p'(a) = q'(a), \dots,\ p^{(n)}(a) = q^{(n)}(a).$$

Da er $p = q$.

Bevis:

La $r(x) = p(x) - q(x)$, et n-tegradspolynom. Da er

$$r(a) = 0,\ r'(a) = 0, \dots,\ r^{(n)}(a) = 0.$$

Skriv $r(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$. Da er

$$r^{(n)}(x) = n!\, b_n = 0 \implies b_n = 0,$$

$$r^{(n-1)}(x) = (n-1)!\, b_{n-1} + n\cdot(n-1)\cdots(2)\underbrace{b_n}_{=0} x = (n-1)!\, b_{n-1}.$$

Men $r^{(n-1)}(a) = 0 \implies b_{n-1} = 0$.

Fortsett slik og få at $b_0 = 0, b_1 = 0, \dots, b_n = 0$, så $r(x) = 0$ for alle x, dvs. $p = q$. ∎

Klarer vi nå å finne et n-tegradspol. slik at

$$p^{(i)}(a) = f^{(i)}(a) \quad \text{for } i = 0, 1, \dots, n \quad ?$$

Vi skriver p på formen

$$p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n,$$

der a er et gitt tall, og vi må bestemme $c_0, c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$.

$$p(a) = c_0 \overset{!}{=} f(a)$$

$$p'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1}, \quad \text{nå}$$

$$p'(a) = c_1 \overset{!}{=} f'(a)$$

$$\vdots$$

$$2c_2 \overset{!}{=} f''(a)$$

$$6c_3 \overset{!}{=} f'''(a)$$

$$\vdots$$

$$n!\,c_n \overset{!}{=} f^{(n)}(a)$$

Vi får at $c_\ell = \dfrac{f^{(\ell)}(a)}{\ell!}$

$$\Rightarrow p(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

$$= \sum_{\ell=0}^{n} \frac{f^{(\ell)}(a)}{\ell!}(x-a)^\ell. \quad = T_n f(x)$$

Dette er det n-tegrads Taylor-polynomet til f om punktet a.

Eksempel:

La $f(x) = \sin(x)$. Beregn $T_5 f(x)$ når $a = 0$.

Vi har:

$$f'(x) = \cos(x) \quad f''(x) = -\sin x \quad f'''(x) = -\cos x \quad f^{(4)}(x) = \sin x$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x,$$

så $f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f^{(3)}(0) = -1,\ f^{(4)}(0) = 0,\ f^{(5)}(0) = 1.$

Vi får

$$T_5 f(x) = 0 + 1 \cdot (x-0) + \frac{0}{2}(x-0)^2 + \frac{-1}{6}(x-0)^3 + 0 + \frac{1}{120}(x-0)^5$$

$$= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

Mer generelt:

$$T_n f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \cdots$$

$f = \cos$:

$$T_n f(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8} - \cdots$$

$f(x) = e^x$: $\quad T_n f(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$

Hva har dette med identiteten $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ å gjøre?