Taylorpolynomer

Hvis f er en funksjon definert om a og med n kontinuerlige deriverte i a så er Taylorpolynomet til f om a av grad n definert ved

$$T_n f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)$$
$$+ \dots + \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a)$$

Egenskaper:

- $T_n f(x)$ er et polynom av grad n
- $(T_n f)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Eks. $f(x) = e^x$, $f^{(k)}(x) = e^x$, $a = 0$

Da blir

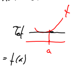
$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} e^0$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \cdot 1 = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

okt 15-12:14

Restleddet - feilen

Restleddet $R_n f(x)$ er feilen når vi tilnærmer f med $T_n f$,

$$R_n f(x) = f(x) - T_n f(x)$$



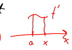
Begynn med $n=0$: $T_0 f(x) = f(a)$

$$R_0 f(x) = f(x) - f(a)$$

$x = b$

$$R_0 f(b) = f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$$

$$R_0 f(x) = f(x) - f(a) = \int_a^x f'(t)\,dt$$



Komme fra $n=0$ til $n=1$.

Ide: Bruk delvisintegrasjon. $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$

$x = b$. $u = f'(t)$, $v = t - b$, $v' = 1$

$$\int_a^b 1 \cdot f'(t)\,dt = [f'(t)(t-b)]_{t=a}^{b} - \int_a^b f''(t)(t-b)\,dt$$

$$= 0 - f'(a)(a-b) - \int_a^b f''(t)(t-b)\,dt$$

Utgangspunkt: $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)\,dt$

$$= f'(a)(b-a) - \int_a^b f''(t)(t-b)\,dt$$

eller $f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \int_a^b f''(t)(b-t)\,dt$

$b = x$

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{T_1 f(x)} + \underbrace{\int_a^x f''(t)(x-t)\,dt}_{R_1 f(x)}$$

Generelt får vi

$$f(x) = \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2} f''(a)(x-a)^2 + \dots + \frac{1}{n!} f^{(n)}(a)(x-a)^n}_{T_n f(x)} + \underbrace{\frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt}_{R_n f(x)}$$

Vi kan skrive

$$R_n f(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \text{ der } c \in (a, x)$$

og avhenger av x

okt 15-12:36

Husk

$$f(x) = f(a) + (x-a) f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a)$$
$$+ \dots + \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a) + \frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)$$

Oppg. Anta at vi ønsker å beregne e med feil mindre enn 10^{-4}, bare vha. $+, -, \cdot, /$.

Strategi: Bruk Taylorpolynomet til e^x, $a=0$

Vi har $T_n e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$

$$e \approx T_n e^1 = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n!}$$

Vi må velge n så stor at feilen blir mindre enn 10^{-4}.

$$R_n f(x) = \frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c), \quad a = 0, \quad f(x) = e^x$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} \cdot e^c, \quad c \in (a, x) = (0, x)$$

Vi velger $x = 1$,

$$|R_n f(1)| = \frac{1}{(n+1)!} 1^{n+1} \cdot e^c, \quad c \in (0, 1)$$

$$= \left|\frac{e^c}{(n+1)!}\right| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} \leq 10^{-4}$$

$\hookrightarrow$ Dette holder første gang når $n = 6$.

okt 15-13:38