Taylors formel med restledd

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2 f''(a) + \underbrace{\dots + \frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)}_{T_nf(a),\ \text{Taylorpolynomet til } f \text{ om } a \text{ av grad } n} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(c)}_{R_nf(x) \text{ – restleddet}}$$

$c \in (a, x)$

$(T_nf)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, $k = 0, 1, \dots, n$.

okt 18-12:10

Ex. Beregn e med feil mindre enn 10^{-3} ved bare å bruke $+, -, *, /$.

Vi bruker Taylorpolynomet av grad n om $a = 0$. Med $f(x) = e^x$

$$T_nf(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!}$$

$$e \approx T_nf(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$= 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

okt 18-12:24

Ex. 11.2.4. i Kalkulus.

Beregn $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ med feil mindre enn 10^{-4}.

Ikke mulig å regne ut med tradisjonelle metoder.

Vår strategi: Tilnærm $\sin x$ med sitt Taylorpolynom av vilkårlig grad og integrer.

$$T_{2n}\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = T_{2n-1}\sin x$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{T_{2n}\sin x}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{R_{2n}\sin x}{x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)}{x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}\right)dx$$

$$= \left[x - \frac{x^3}{3\cdot 6} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}\right]_{x=0}^{1} \qquad \frac{1}{(2n+1)!} \leq 1$$

$$= 1 - \frac{1}{3\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 5!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)(2n-1)!}$$

$$R_{2n}\sin x = \frac{(-1)^2}{(2n+1)!}x^{2n+1}f^{(2n+1)}(c), \quad f(x) = \sin x$$

$$|R_{2n}\sin x| = \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}|f^{(2n+1)}(c)| \leq \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Feilen:

$$\left|\int_0^1 \frac{R_{2n}\sin x}{x}\,dx\right| \leq \int_0^1 \frac{|R_{2n}\sin x|}{x}\,dx$$

$$\leq \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x(2n+1)!}\,dx = \int_0^1 \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}\,dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}\right]_{x=0}^{1}$$

$$= \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}$$ Dette er mindre enn 10^{-4} for første gang når $n = 3$.

$\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!} \leq 10^{-4}$. Prøver ulike verdier av n.

Derfor er tilnærmingen gitt ved

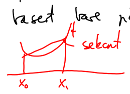
$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx \approx 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} \quad \text{med feil} \leq 10^{-4}$$

okt 18-12:38

Interpolasjon

$T_nf(x)$ matcher $f(x)$ i de $n+1$ første deriverte i a. $(T_nf)^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, $k = 0, 1, \dots, n$.

Ofte er det bedre å lage en tilnærming basert bare på funksjonsverdier.



Interpolasjonsproblemet.

Gitt verdier $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$.

Finn et polynom P_n av grad n slik at

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n.$$

Dette går alltid bra om alle x_i-ene er forskjellige.

Det lønner seg å skrive P_n på Newtonform

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \dots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

$P_n(x_0) = f(x_0)$, $P_n(x_1) = f(x_1)$

okt 18-13:42