Om tallsystemer

$d_3 d_2 d_1 d_0 , d_{-1} d_{-2}\,{}_\beta$

$d_3\beta^3 + d_2\beta^2 + d_1\beta^1 + d_0\beta^0 + d_{-1}\beta^{-1} + d_{-2}\beta^{-2}$

Komp.

3.2.2 a) <u>Algoritme 3.7</u>

$a \in \mathbb{N}$ $i = 0$

while $a > 0$

$d_i = a \% \beta$

$a = a // \beta$

$i = i + 1$

Vil gi deg sifrene til a i β-Tallsystemet.

Skriv tallet 40 i 4-tallsystemet.

40	0
10	2
2	2

$40 \% 4 = 0$ $40 // 4 = 10$

$10 \% 4 = 2$ $10 // 4 = 2$

$2 \% 4 = 2$ $2 // 4 = 0$

$40 = 220_4$

b) Skriv 17 i 5-tallsystemet.

17	2
3	3
0	

$17 \% 5 = 2$ $17 // 5 = 3$

$3 \% 5 = 3$ $3 // 5 = 0$

$\underline{\underline{17 = 32_5}}$

3.2.5 konverter til 16-tallsystemet.

desimal	16-tall
10	a
11	b
12	c
13	d
14	e
15	f

a) $100\ 1101_2 =$

$= 1\cdot 2^6 + 0\cdot 2^5 + 0\cdot 2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$

$= (1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 0\cdot 2^0)2^4 + 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1\cdot 2^0$

$= 4\cdot 2^4 + 13$

$= 4\cdot 16 + 13\cdot 16^0 = 4d_{16}$

c) $10\ 1001\ 1110\ 0100_2 = 29e4_{16}$

8 4 2 1
$0100 = 4$
8 4 2 1
$1110 = 14 = e_{16}$
$1001 = 9$
$10 = 2$

3.3.3a) Konverter til 2-tallsystemet.

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{2^2} = 2^{-2} = 0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} = 0{,}01_2$$

b) Konverter $3/7$ til 3-tallsystemet.

Bruker algoritme 3.20

La $\frac{b}{c} \in (0,1)$ og $b, c \in \mathbb{N}$

for $i = -1, -2, -3 \dots -k$

$d_i = (b \cdot \beta) // c$

$b = b \cdot \beta \,\%\, c$

$\frac{3}{7}$	1	$(3\cdot 3)//7 = 1$	$(3\cdot 3)\%7 = 2$
$\frac{2}{7}$	0	$(2\cdot 3)//7 = 0$	$(2\cdot 3)\%7 = 6$
$\frac{6}{7}$	2	$(6\cdot 3)//7 = 2$	$(6\cdot 3)\%7 = 4$
$\frac{4}{7}$	1	$(4\cdot 3)//7 = 1$	$(4\cdot 3)\%7 = 5$
$\frac{5}{7}$	2	$(5\cdot 3)//7 = 2$	$(5\cdot 3)\%7 = 1$
$\frac{1}{7}$	0	$(1\cdot 3)//7 = 0$	$(1\cdot 3)\%7 = 3$
$\frac{3}{7}$			

$$\frac{3}{7}_{10} = 0{,}102120\ 102120\dots$$

3.3.7 Vis at dersom sifrene i et desimaltall forekommer i repeterende sekvenser er tallet rasjonalt.

Bevis

Påstanden holder for enhver $\beta \geq 2$, så la $\beta \geq 2$.

La $a = 0{,}d_{-1}d_{-2}d_{-3}\ldots_{\beta}$

La lengden på den repeterende sekvensen være t.

Da har vi en sekvens på formen $d_{-k}, \ldots, d_{-k-(t-1)}$

$d_{-k} = d_{-k-t}$

$d_{-k-1} = d_{-k-(t+1)}$ osv.

$$a = \sum_{i=1}^{\infty} d_{-i}\beta^{-i} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k-1} d_{-i}\beta^{-i}}_{M} + \sum_{i=k}^{\infty} d_{-i}\beta^{-i}$$

$$= M + \sum_{s=0}^{\infty}\left(d_{-k-st}\beta^{-k-st} + \cdots + d_{-k-st-(t-1)}\beta^{-k-st-(t-1)}\right)$$

$$= M + \sum_{s=0}^{\infty}\left(d_{-k}\beta^{-k-st} + \cdots + d_{-k-(t-1)}\beta^{-k-st-(t-1)}\right)$$

$$= M + \sum_{s=0}^{\infty}\beta^{-st}\underbrace{\left(d_{-k}\beta^{-k} + \cdots + d_{-k-(t-1)}\beta^{-k-(t-1)}\right)}_{N}$$

$$= M + \sum_{s=0}^{\infty}\beta^{-st}N$$

$$= M + \sum_{s=0}^{\infty}(\beta^{-t})^{s}N$$

$$= M + \frac{N}{1-\beta^{-t}} = \frac{N\beta^{t}}{\beta^{t}-1} + M.$$

Setning 12.1.1 i kalkulus.

$$\sum_{s=0}^{\infty} r^{s}N = \frac{N}{1-r}$$ der $|r|<1$

Siden M og N er endelige summer med rasjonale tall er M og N rasjonale. Da er $M + \frac{N\beta^{t}}{\beta^{t}-1}$ rasjonal.