3 egenskapene til summetegnet.

(i) $\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=k}^{m} b_n = \sum_{n=k}^{m} (a_n + b_n)$

(ii) $\sum_{n=k}^{m} c\, a_n = c \sum_{n=k}^{m} a_n$

(iii) $\sum_{n=k}^{m} a_n + \sum_{n=m+1}^{l} a_n = \sum_{n=k}^{l} a_n$

Bytte av summasjonsgrenser

To summer kan være like, men se veldig forskjellig ut.

$$\sum_{n=0}^{4} x^{3-n} = x^3 + x^2 + x + 1 + x^{-1}$$

$$\sum_{k=-1}^{3} x^k = x^{-1} + 1 + x + x^2 + x^3$$

$k = 3 - n$

Øvre summasjonsgrense

$n=0$ $k = 3 - 0 = 3$

Nedre summasjonsgrense

$n = 4$ $k = 3 - 4 = -1$

Eksempel

$$\sum_{k=-3}^{11} (-1)^{k+1} x^{k+3}$$

$n = k+3 \qquad n-2 = k+1$

$$\sum_{n=0}^{14} (-1)^{n-2} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{14} \frac{1}{(-1)^2} (-1)^n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{14} (-1)^n x^n$$

Nedre summasjonsgrense

$k = -3 \qquad n = k+3 = -3+3 = 0$

Øvre summasjonsgrense

$k = 11 \qquad n = k+3 = 11+3 = 14$

Induksjon

La n være et naturlig tall dvs. $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ Vi kaller P_n et utsagn hvis P_n er enten sann eller usann for n.

Eksempel

P_n : $\quad n > 3$

$n=1$	P_1	$1 > 3$	usant
$n=2$	P_2	$2 > 3$	usant
$n=3$	P_3	$3 > 3$	usant
$n=4$	P_4	$4 > 3$	sant

Eksempel

P_n : $n+1$ delelig med 3

P_1	$1+1=2$	$\frac{2}{3}$	usant
P_2	$2+1=3$	$\frac{3}{3}=1$	sant
P_3	$3+1=4$	$\frac{4}{3}$	usant.

Eksempel

$$P_n : \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$$

P_1 VS: $\sum_{i=1}^{1} i = 1$ Sann

HS: $\frac{1}{2} 1 \cdot (1+1) = 1$

P_2 VS: $\sum_{i=1}^{2} i = 1+2 = 3$ Sann

HS: $\frac{1}{2} 2(2+1) = 3$

P_3 VS: $\sum_{i=1}^{3} i = 1+2+3 = 6$

HS: $\frac{1}{2} 3(3+1) = 6$

P_4 VS: $\sum_{i=1}^{4} i = \sum_{i=1}^{3} i + 4 = 6+4 = 10$

HS: $\frac{1}{2} 4(4+1) = 10$

Hva med P_{1000} ?

Det vil bli veldig tidkrevende å sjekke.

Induksjonsprinsippet.

La P_n være et utsagn for alle naturlige tall n. Anta videre at følgende to krav er oppfylt:

(i) P_1 er sann

(ii) Dersom P_k er sann for en $k \in \mathbb{N}$ så er P_{k+1} også sann.

Da er P_n sann for alle $n \in \mathbb{N}$.

Induksjonsbevis for

$$P_n: \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$$

(i) P_1 VS: $\sum_{i=1}^{1} i = 1$ sann

HS: $\frac{1}{2} 1 (1+1) = 1$

(ii) Anta at P_k er sann for en $k \in \mathbb{N}$

Det vil si

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{1}{2} k(k+1) \qquad (*)$$

Vil vise at P_{k+1} er sann

VS: $$\sum_{i=1}^{k+1} i = \underbrace{1+2+3+4+\cdots+k}+(k+1)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} i + k+1$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{1}{2} k(k+1) + (k+1)$$

$$= \left(\frac{1}{2} k + 1\right)(k+1)$$

$$= \frac{1}{2}(k+2)(k+1)$$

HS:
$$\frac{1}{2}(k+1)(k+1+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2$$

så vi har VS = HS

Oppg. 1.2.6

Vis at $n(n^2+5)$ er delelig med 6 for alle $n \in \mathbb{N}$

P_n: $n(n^2+5)$ delelig med 6

(i) P_1 $\quad 1(1^2+5)=6 \quad \frac{6}{6}=1$ Sann

(ii) Anta at P_k er sann. Altså at $k(k^2+5)$ er delelig med 6

Vil vise at P_{k+1} er sann.

Vi har

$$(k+1)\left((k+1)^2+5\right)$$
$$=(k+1)(k^2+2k+1+5)$$
$$=k(k^2+5)+2k^2+k+k^2+2k+1+5$$
$$=k(k^2+5)+3k^2+3k+6$$
$$=k(k^2+5)+3k(k+1)+6$$

Per antagelse er $k(k^2+5)$ delelig med 6. 6 er åpenbart delelig med 6.

(1) Hvis k er et partall så kan jeg skrive $k=2a$ for en $a \in \mathbb{N}$.

Da er $\quad 3\cdot 2a(2a+1)=6a(2a+1)$

delelig med 6.

(2) Hvis k er et oddetall så kan jeg skrive $k=2a-1$ for $a \in \mathbb{N}$.

$$3\cdot(2a-1)(2a-1+1)=3\cdot(2a-1)(2a)$$
$$=6a(2a-1)$$ som er delelig med 6.

Altså er $(k+1)\left((k+1)^2+5\right)$ delelig med 6 og P_{k+1} er sann.

Eksempel 1.2.4

Bernoullis ulikhet

P_n: $(1+x)^n \geq 1+nx$ for $x \geq -1$

(i) P_1 $(1+x)^1 \geq 1+1\cdot x$ sann

(ii) Antar at P_k er sann.

Altså at

* $(1+x)^k \geq 1+kx$ for $x \geq -1$

Vil vise at gitt at P_k er sann så er P_{k+1} også sann

Vil vise:

$$(1+x)^{k+1} \geq 1+(k+1)x \quad \text{for } x \geq -1$$

Vi har

$$(1+x)^{k+1} = \overbrace{(1+x)}^{\geq 0}(1+x)^k \overset{(*)}{\geq} (1+x)(1+kx)$$

$$= 1 + kx^2 + x + kx$$

$$= 1 + (k+1)x + \underbrace{kx^2}_{\geq} \geq 1 + (k+1)x$$

Altså er P_{k+1} sann og beviset er fullført.