Reelle tall, 26/8 – 19

Vi betegner de reelle tallene med $\mathbb{R}$.

Intervaller

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$, lukket intervall

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$, åpent intervall

Sær lukket mengde: $[0,0] = \{0\}$

$(0,0) = \emptyset$

Tallverditegn:

Tallverdien til a er definert som

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{hvis } a \ge 0 \\ -a, & \text{hvis } a < 0 \end{cases}$$

$|2| = 2$, $|-2| = 2$, $|0| = 0$

Trekantulikheten. Hvis $a, b \in \mathbb{R}$ så er

$$|a+b| \le |a| + |b|$$

Når er det likhet?
Når er det ulikhet?

$a = 2$, $b = 3$, $|a+b| = 5$, $|a| + |b| = 5$ likhet

$a = 2$, $b = -3$, $|a+b| = 1$, $|a| + |b| = 5$ ulikhet

$a = -2$, $b = -3$, $|a+b| = |-2-3| = 5$, $|a| + |b| = 5$ likhet

Rasjonale og irrasjonale tall.

Et reelt tall som kan skrives som en brøk, $x = a/b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, kalles rasjonalt tall.

Mengden av alle rasjonale tall er $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0 \right\}$$

Merk at $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

Et reelt tall som ikke er rasjonalt sies å være irrasjonalt.

Setning 2.2.1. Hvis x og y er rasjonale tall så er $x+y$, $x-y$, xy og x/y ($y \neq 0$) også rasjonale tall.

Korollar 2.2.2. Dersom en av x og y er rasjonal og den andre irrasjonal så er $x+y$ og $x-y$ irrasjonale. Hvis i tillegg både x og y er $\neq 0$ så er $x \cdot y$ og x/y irrasjonale.

Bevis. Vi skal vise at $a = x+y$ er irrasjonal. Anta x rasjonal, y irrasjonal. La oss anta at a er rasjonal og se hva som skjer. Vi har $y = a - x$. Da må y være rasjonal, noe som gir en selvmotsigelse. Altså har vi ikke annet valg enn at a er irrasjonal.