Husker fra forrige forelesning at et reelt tall x kalles rasjonal hvis det kan skrives som en brøk.

$$x \text{ rasjonal} \Leftrightarrow x = \frac{a}{b} \qquad a, b \in \mathbb{Z} \quad b \neq 0.$$

Rasjonale tall $\mathbb{Q}$

Reelle tall som ikke er rasjonale kalles irrasjonale.

2.2.3 Lemma

Dersom $a \in \mathbb{N}$ er et oddetall, så er a^2 også et oddetall.

Bevis

Siden a er et oddetall kan vi skrive $a = 2n-1$ for $n \in \mathbb{N}$.

$$a^2 = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 = 4n(n-1) + 1$$

$4n(n-1)$ er delelig med 2. så $4n(n-1)+1$ er et oddetall

2.2.4 Teorem

$\sqrt{2}$ er et irrasjonalt tall.

Bevis

Anta at $\sqrt{2}$ er rasjonal. Vi vil vise at dette leder til en selvmotsigelse.

Dersom $\sqrt{2}$ er rasjonal, kan vi finne tall $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ slik at.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \qquad \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Vi kan anta at brøken a/b er forkortet så mye som mulig, altså at det er ingen felles primtalls faktorer i a og b.

Hvis

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \qquad \text{så} \qquad 2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Det gir $\quad 2b^2 = a^2$

Altså er a^2 et partall. Da må a være et partall. For hvis a var et oddetall så lemma 2.2.3 at a^2 er et oddetall.

Siden a er et partall kan vi skrive

$$a = 2n \qquad \text{for } n \in \mathbb{Z}$$

$$\cancel{2} b^2 = a^2 = \cancel{4}^{2} n^2$$

$$b^2 = 2n^2$$

Som betyr at b^2 er et partall som gir at b er et partall.

Det betyr at a og b begge er partall, som gir at de har felles faktor 2. Dette motsier antagelsen om at brøken a/b var forkortet så mye som mulig. Altså vi har en motsigelse.

Siden $\sqrt{2}$ ikke kan være rasjonal må den være irrasjonal.

Er

$$2+\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{rasjonal?}$$

Nei. det er irrasjonalt.

$\sqrt{5}$ er irrasjonal.

Er

$$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}-\frac{\sqrt{5}}{2} \quad \text{rasjonalt?}$$

$$\frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}-\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{5+2\sqrt{5}+1}{5-1}-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{6+\cancel{2\sqrt{5}}}{4}-\cancel{\frac{2\cdot\sqrt{5}}{4}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

2.2.6 Arkimedes Prinsipp

(i) For ethvert reelt tall a (uansett hvor stort) finnes det et naturlig tall n som er større a.

(ii) For ethvert positivt reelt tall b (uansett hvor lite) finnes det et naturlig tall m slik at $\frac{1}{m}$ er mindre enn b.

Bevis

(i) Hvis $a < 1$ velger vi $n = 1$. Hvis $a \geq 1$ Skriv ned a som et desimaltall, fjern alle sifrene bak komma og pluss på f.eks 5.

(ii) Bruker (i) til å finne en $m \in \mathbb{N}$ slik at $m > \frac{1}{b}$. Da er $\frac{1}{m} < b$.

2.2.7 Setning

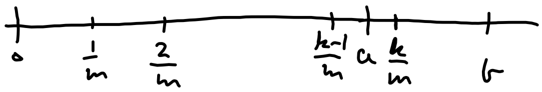
Ethvert åpent interval (a, b) (der $a < b$) inneholder både rasjonale og irrasjonale tall.

Bevis

Vi begynner med å finne det rasjonale tallet.

La $m \in \mathbb{N}$ slik at $\frac{1}{m} < b - a$

(en slik m må finnes ved Arkimedes prinsipp)



La k være det minste hele tallet slik at $k > am$. Da er $\frac{k}{m} > a$

Må vise at $\frac{k}{m} < b$ for da er $\frac{k}{m} \in (a, b)$

Vi har at

$$\frac{k}{m} = \frac{k}{m} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \underbrace{\frac{k-1}{m}}_{\leq a} + \underbrace{\frac{1}{m}}_{< b-a} < a + (b - a) = b$$

Så $\frac{k}{m} < b$

Så $\frac{k}{m} \in (a, b)$ så vi har et rasjonalt tall i intervallet.

Finner et irrasjonalt tall.

La $c = \frac{k}{m}$ Vil finne et lite irrasjonalt som vi kan addere med c.

Bruker Arkimedes prinsipp til å finne et naturlig tall p

$$\frac{1}{p} < \frac{(b - c)}{\sqrt{2}}$$

$c = \frac{k}{m}$

$c < b$

$b - c > 0$

$$\frac{\sqrt{2}}{p} < b - c$$

$$c + \frac{\sqrt{2}}{p} < b$$

hvor $c + \frac{\sqrt{2}}{p}$ er irrasjonalt.

$a < c \Rightarrow a < c + \frac{\sqrt{2}}{p}$ så $c + \frac{\sqrt{2}}{p} \in (a, b)$

2.3 Komplettheten av de reelle tallene.

$$x^2 - 2 = 0 \qquad x \in \mathbb{Q}$$

Tallsystemet $\mathbb{Q}$ har altså "hull"

Kan $\mathbb{R}$ ha tilsvarende "hull"?

Skal se at $\mathbb{R}$ ikke har tilsvarende hull

Litt notasjon

En delmengde A av $\mathbb{R}$ kalles oppad begrenset hvis det finnes et tall b som er større enn alle elementene i A.