$$3761_{10} = 3\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 6\cdot 10^1 + 1\cdot 10^0$$

$$101_7 = 1\cdot 7^2 + 0\cdot 7^1 + 1\cdot 7^0$$

Mer generelt hadde vi at for et grunntall B

$B \in \mathbb{N}$, $B > 1$ så skal en sammensatt siffer

$$(d_k d_{k-1} \dots d_0)_B$$

tolkes som

$$d_k B^k + d_{k-1} B^{k-1} + \dots + d_0 B^0$$

hver av disse d_i $i = 0, \dots k$ representerer

heltall mellom 0 og $B-1$

$$\cancel{8_8} = 10_8 = 1\cdot 8 + 0\, 8^0 = 8_{10}$$

16-tall systemet $\{0, 1, 2, 3 \dots 9, \overset{10}{a}, \overset{11}{b}, \overset{12}{c}, \overset{13}{d}, \overset{14}{e}, \overset{15}{f}\}$

Hva med tall i intervallet $(0,1)$?

$$0{,}5_{10} = 5\cdot 10^{-1} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

$$0{,}25_{10} = 2\cdot 10^{-1} + 5\cdot 10^{-2} = \frac{2}{10} + \frac{5}{10^2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 5}$$

$$= \frac{4+1}{2\cdot 2\cdot 5} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333\ldots_{10} = 3\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} + 3\cdot 10^{-3} + \ldots$$

Mer generelt har vi at et tall i intervallet $[0,1]$ kan representeres i β-siffersystem $(\beta \in \mathbb{N}, \beta > 1)$ ved enten endelig eller uendelig ordnet samling av siffer

$$(0,d_{-1}d_{-2}d_{-3}\ldots)_\beta \text{ som skal}$$

tolkes som det reelle tallet

$$d_{-1}\beta^{-1} + d_{-2}\beta^{-2} + d_{-3}\beta^{-3} + \ldots$$

Tallet 1 kan skrives på formen $(0,d_{-1}d_{-2}d_{-3}\ldots)_\beta$

Sett $\underline{d_i = \beta - 1}$ for $i = -1,-2,-3\ldots$

$x = (0,d_{-1}d_{-2}d_{-3}\ldots)_\beta$

skal det tolkes som det reelle tallet

$$x = (\beta-1)\beta^{-1} + (\beta-1)\beta^{-2} + (\beta-1)\beta^{-3} + \ldots$$

$$= \frac{(\beta-1)}{\beta}\left[1 + \beta^{-1} + \beta^{-2} + \ldots\right]$$

$$= \frac{\beta-1}{\beta}\sum_{i=0}^{\infty}(\beta^{-1})^i = \frac{\beta-1}{\beta}\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\beta}\right)^i$$

$$= \frac{\beta-1}{\beta}\,\frac{1}{1-\frac{1}{\beta}} = \frac{\beta-1}{\beta}\,\frac{\beta}{\beta-1} = 1$$

Setning 12.1 i Kalkulus

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 r^n = \frac{a_0}{1-r}$$

hvis $|r| < 1$

$\beta > 1$

$\frac{1}{\beta} < 1$

Eksempel

$0{,}99999\ldots_{10}$ er 1.

$0{,}88888\ldots_9$ er 1.

$0{,}13_{10}$ kan også representeres som $0{,}12999999\ldots_{10}$

Teorem

Ethvert reelt tall i intervallet $(0,1)$ kan representeres unikt som et desimaltall i et β-siffersystem ($\beta \in \mathbb{N}$, $\beta > 1$), gitt at alle representasjoner som ender med uendelig mange siffer, hvor alle sifrene er lik $\beta - 1$, ikke tillates.

Konvertering av brøker til andre siffersystemer.

Har sett at ethvert tall på formen

$$d_{-1}\beta^{-1} + d_{-2}\beta^{-2} + d_{-3}\beta^{-3} + \dots$$

ligger i intervallet $[0,1]$

Skriv $\frac{1}{5}$ i 8-tallsystemet

$d_{-i} \in \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$$\frac{1}{5} = d_{-1}8^{-1} + d_{-2}8^{-2} + d_{-3}8^{-3} + \dots \quad \Big| \cdot 8$$

$d_{-1}=1$ $$\frac{8}{5} = 1 + \frac{3}{5} = \underbrace{d_{-1}}_{=1} + \underbrace{d_{-2}8^{-1} + d_{-3}8^{-2} + \dots}_{\text{ligger i } [0,1]}$$

$$\frac{3}{5} = d_{-2}8^{-1} + d_{-3}8^{-2} + d_{-4}8^{-3} + \dots \quad \Big| \cdot 8$$

$d_{-2}=4$ $$\frac{24}{5} = 4 + \frac{4}{5} = \underbrace{d_{-2}}_{4} + \underbrace{d_{-3}8^{-1} + d_{-4}8^{-2} + \dots}_{\in [0,1]}$$

$$\frac{4}{5} = d_{-3}8^{-1} + d_{-4}8^{-2} + d_{-5}8^{-3} + \dots \quad \Big| \cdot 8$$

$d_{-3}=6$ $$\frac{32}{5} = 6 + \frac{2}{5} = \underbrace{d_{-3}}_{=6} + \underbrace{d_{-4}8^{-1} + d_{-5}8^{-2} + \dots}_{\in [0,1]}$$

$$\frac{2}{5} = d_{-4}8^{-1} + d_{-5}8^{-2} + d_{-6}8^{-3} + \dots \quad \Big| \cdot 8$$

$$\frac{16}{5} = 3 + \frac{1}{5} = \underbrace{d_{-4}}_{=3} + \underbrace{d_{-5}8^{-1} + d_{-6}8^{-2} + \dots}_{\in [0,1]}$$

$d_{-4}=3$

$$\frac{1}{5} = d_{-5}8^{-1} + d_{-6}8^{-2} + \dots$$

$d_{-5} = 1$ $\quad$ $d_{-9} = 1$

$d_{-6} = 4$

$d_{-7} = 6$

$d_{-8} = 3$

$$0,\underbrace{1463}\underbrace{1463}1463\,14\dots_8$$

Algoritme 3.20

La $a = \frac{b}{c}$ være et rasjonalt tall i intervallet $[0,1)$
De k første sifferene i β-siffersystemet kan da regnes ut som

for $i = -1, -2, -3, \ldots, -k$
$d_i = (b \cdot \beta) // c$
$b = (b \cdot \beta) \% c$

$5 // 2 = 2$
$5 \% 2 = 1$

$$\frac{a_{10}}{b_{10}} = \frac{c_8}{d_8} \qquad a_{10} = c_8 \qquad b_{10} = d_8$$

$$\frac{1}{7} = 0{,}001\,001\,001\,001\ldots_2$$

$$\frac{1}{7} = 1 \cdot 7^{-1} = 0{,}1_7$$

Lemma 3.2.1

La $a \in (0,1)$. Da vil sifrene til a i β-sifferssystemet gjenta seg dvs

$$a = (0, d_{-1} \ldots d_{-i} d_{-i-1} \ldots d_{-i-m} d_{-i-1} \ldots d_{-i-m} d_{-i-m} \ldots)_\beta$$

hvis og bare hvis a er et rasjonalt tall.

(Spesielt betyr dette at hvis a er irrasjonalt så vil sifrene ikke gjenta seg i et bestemt system.)

Ved argumentasjonen ovenfor har vi vist at hvis a er rasjonal så vil sifrene gjenta seg.

I oppgave 3.3.7. skal vi vise at hvis sifrene gjentar seg så er a rasjonal. Det er "bare hvis"

$A \Rightarrow B$

ikke $B \Rightarrow$ ikke A

A = Er i Oslo $\quad B$ = Er i Norge

$A \Rightarrow B$

Er ikke i Norge $\Rightarrow$ Er ikke i Oslo.

ikke $B \Rightarrow$ ikke A

a ikke er rasjonal (dvs irrasjonal) $\Rightarrow$ ingen gjentagende sekvenser.

Gjenntagende sekvenser $\Rightarrow$ a er rasjonal

Lemma 3.22

Et rasjonalt tall $a = \frac{b}{c} \in [0,1)$
kan representeres med et endelig antall sifter i β-tallsystemet dvs

$$a = (0,d_{-1}d_{-2}\cdots d_{-k})_\beta$$

hvis alle primtallsfaktorene i c deler β.

Eksempel

$\frac{8}{9}$ $\beta = 6$ $c = 9 = 3\cdot 3$

$\beta/3 = 6/3 = 2$

$$\frac{8}{9} = \frac{8\cdot 4}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3} = \frac{32}{6^2} = \frac{5\cdot 6+2}{6^2} = 5\cdot 6^{-1} + 2\cdot 6^{-2}$$

$$\frac{8}{9} = 0,52_6$$

$\frac{1}{10}$ i 2-tallsystemet

$\beta = 2$ $c = 10 = 2\cdot 5$

$\beta/2 = 1$ OK

$\beta/5 = 2/5$ ikke OK

$\frac{1}{10} = 0,1_{10}$