Homogene annen ordens differensligning

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$$

Forsøkte med løsninger $x_n = r^n$ (r ukjent tall)

$$r^{n+2} + b r^{n+1} + c r^n = 0$$

$$r^n (r^2 + br + c) = 0$$

1) $r^n = 0$ for alle n. Altså $x_n = 0^n = 0$

2) $r^2 + br + c = 0$ (karakteristisk ligning)

↳ Har 2 røtter r_1 og r_2

↳ Lemma 4.1.4

$$x_n = C r_1^n + D r_2^n$$

er en løsning

Må sjekke tre tilfeller

i) $r_1 \neq r_2$ $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

ii) $r_1 = r_2$ $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$

iii) $r_2 = \bar{r}_1$ $r_1, r_2 \in \mathbb{C}$.

To forskjellige reelle røtter

Eks. $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 4x_n = 0$

Karakteristisk ligning

$$r^2 - 5r + 4 = 0$$

$$ar^2 + br + c = 0$$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$r = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} 4 \\ 1 \end{cases}$$

$r_1 = 1 \qquad r_2 = 4$

Generell løsning: $x_n = C \cdot 1^n + D4^n$
$= C + D4^n$

Trenger startverdier for å spikre løsningen.

Anta $x_0 = 1$ og $x_1 = -2$

$$1 = x_0 = C + D4^0 = C + D$$
$$-2 = x_1 = C + 4D$$

I $\quad 1 = C + D$

II $\quad -2 = C + 4D$

I − II: $3 = -3D$

$D = -1$

$1 = C + D$

$C = 2$

$x_n = 2 - 4^n$

Fibonacci-tallene $\quad x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$

Karakteristisk lign. $\quad r^2 - r - 1 = 0$

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4(-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_n = C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \qquad \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{array}$$

$x_1 \quad x_2$

$1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \ldots$

En reell rot

Setning 4.1.10

Anta at polynomet $r^2 + b r + c = 0$ har én rot r_1. Da er den generelle løsningen til

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$$

gitt ved

$$x_n = C r_1^n + D n r_1^n$$

Eksempel

$$x_{n+2} - 4 x_{n+1} + 4 x_n = 0$$

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

$$r = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 4}}{2} = 2$$

$$x_n = C 2^n + D n 2^n$$

Anta $x_0 = 1$ og $x_1 = 8$

$$1 = x_0 = C + 0 \quad \Rightarrow \quad C = 1$$

$$8 = x_1 = C 2 + D \cdot 1 \cdot 2$$

$$8 = 2 + 2D$$

$$\underline{D = 3}$$

$$\underline{\underline{x_n = 2^n + 3n 2^n}}$$

To komplekskonjugerte røtter

$r = \bar{r}$

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

Da er

$$x_n = c\, r^n + D(\bar{r})^n \qquad D = \bar{c}$$

$$x_n = c\, r^n + \bar{c}\, \bar{r}^n$$

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$\overline{x_n} = \overline{c\, r^n + \bar{c}\, \bar{r}^n}$$

$$= \bar{c}\, \bar{r}^n + c\, r^n \quad = x_n$$

Detaljsjekk

$$r = \rho e^{i\theta} \qquad \bar{r} = \rho e^{-i\theta}$$

$$c = A + iB \qquad \bar{c} = A - iB$$

$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$

$\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$

Det gir

$$x_n = c\, r^n + \bar{c}\, \bar{r}^n$$

$$= (A+iB)(\rho e^{i\theta})^n + (A-iB)(\rho e^{-i\theta})^n$$

$$= (A+iB)\rho^n e^{in\theta} + (A-iB)\rho^n e^{-in\theta}$$

De Moivres formel

$$= (A+iB)\rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) + (A-iB)\rho^n(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))$$

$$= \rho^n[\underset{\downarrow}{2A}\cos(n\theta) + \underbrace{2B(i)^2}_{-2B = F}\sin(n\theta)]$$

$$= \rho^n[E\cos(n\theta) + F\sin(n\theta)]$$

Eksempel

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0 \qquad x_0 = 1,\quad x_1 = 2$$

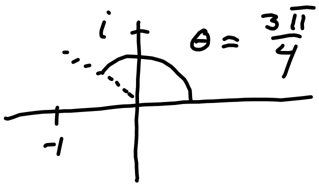
Kar. lig.

$$r^2 + 2r + 2 = 0$$

$$r = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 2}}{2} = -1 \pm \frac{\sqrt{-4}}{2} = -1 \pm \frac{2i}{2}$$

$$= -1 \pm i$$

$$r = -1 + i$$



$$\rho = |r| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$r = -1 + i = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4} i} \qquad \rho = \sqrt{2},\quad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

$$x_n = \rho^n \left[E \cos(n\theta) + F \sin(n\theta)\right]$$

$$= \sqrt{2}^{\,n} \left[E \cos\left(\tfrac{3\pi}{4} n\right) + F \sin\left(\tfrac{3\pi}{4} n\right)\right]$$

Initial betingelser

$$x_0 = 1 \qquad x_1 = 2$$

$$1 = x_0 = E + 0 \quad \Rightarrow \quad E = 1$$

$$2 = x_1 = \sqrt{2}\left[E \cos\left(\tfrac{3\pi}{4}\right) + F \sin\left(\tfrac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$$2 = \sqrt{2}\left[E\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} F\right]$$

$$2 = -E + F$$

$$E = 1$$

$$2 = -1 + F \quad \Rightarrow \quad F = 3$$

$$x_n = \sqrt{2}^{\,n} \left[\cos\left(\tfrac{3\pi}{4} n\right) + 3 \sin\left(\tfrac{3\pi}{4} n\right)\right]$$

Differensligninger Anvendelser.

Oppg. 4.1.3 <u>Smittsom sykdom</u>

Av de som er syke en uke er 25% syke uken etter. Inkubasjonstiden til sykdomen er 2 uker. En person som var syk for to uker siden vil i gjennomsnitt ha smittet $\frac{5}{4}$ personer denne uken.

La x_n være antall syke personer i uke n.

$$x_n = \frac{1}{4} x_{n-1} + \frac{5}{4} x_{n-2}$$

Første uken er 190 syke $x_1 = 190$

Andre uken er 260 syke $x_2 = 260$

```
x_1 = 190
x_2 = 260
for i = 3, 4... N
    x_i = 1/4 x_{i-1} + 5/4 x_{i-2}
```

```
xpp = x1
xp = x2
for i = 3, 4, ..., N
    x = 1/4 xp + 5/4 xpp
    print(x)
    xpp = xp
    xp = x
```

~~xp = x~~

~~xpp = xp~~

Har sett på

$$x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$$

$$x_{n+2} = -b x_{n+1} - c x_n$$

Det finnes mange flere måter å lage differensligning på!

$$x_{n+2} = x_n x_{n+1} + 5$$

$$x_{n+3} = e^n x_n + (x_{n+1})^2 + x_{n+2} \qquad n=1$$

Def. 6.4 (kompendiet)
En differensligning som avhenger av de k-foregående leddene kalles en k'te ordens differensligning. Kan skrives på formen

$$x_{n+k} = f(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1})$$

En slik ligning trenger k initialbetingelser.

$$x_0 = a_0 \quad x_1 = a_1 \quad \dots \quad x_{k-1} = a_{k-1}$$