Simulering av differens ligninger og avrundingsfeil

Fibonacci tallene

$$x_n = \frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

$(1{,}62)^n \qquad (-0{,}62)^n$

Idee

For å studere avrundingsfeil ved simulering av differensligning, ser vi på diff. lig. hvor vi vet løsning.

Eksempel

$$x_{n+2} - \frac{2}{3}x_{n+1} - \frac{1}{3}x_n = 0 \qquad x_0 = 1,\; x_1 = 0$$

Simulerer som

$$x_{n+2} = \frac{2}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n$$

Må bruke flyttall.

Digresjon

Største heltall (64-bit)

$$2^{63} - 1 \approx 9 \cdot 10^{18}$$

Største flyttall

$1{,}8 \times 10^{308}$ ← Bare de 16-17 første sifferne.

$$x_{n+2} - \frac{2}{3}x_{n+1} - \frac{1}{3}x_n = 0 \qquad x_0 = 1,\; x_1 = 0$$

Karakteristisk lig.

$$r^2 - \frac{2}{3}r - \frac{1}{3} = 0$$

Løsning $r = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{3} \end{cases}$

Generell løsning

$$x_n = C \cdot 1^n + D\left(-\frac{1}{3}\right)^n = C + D\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 1 = C + D \\ x_1 &= 0 = C - \tfrac{1}{3}D \end{aligned}\right\} \qquad C = \frac{1}{4},\quad D = \frac{3}{4}$$

Løsning

$$x_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{4}\left(1 + (-1)^n (3)^{1-n}\right)$$

For store n vil $3^{1-n} \approx 0$

Forventer $x_n = \frac{1}{4}$

Eksempel

$$x_{n+2} - \frac{19}{3} x_{n+1} + 2x_n = 0 \qquad x_0 = 1, \quad x_1 = \frac{1}{3}$$

Har for ~~røtter~~ $x_{n+2} = \frac{19}{3} x_{n+1} - 2x_n$

$$r_1 = \frac{1}{3} \qquad r_2 = 6$$

Generell løsning

$$x_n = C\, 3^{-n} + D\, 6^n$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 1 = C + D \\ x_1 &= \frac{1}{3} = \frac{1}{3} C + 6D \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} C &= 1 \\ D &= 0 \end{aligned}$$

Løsning

$$x_n = 3^{-n}$$

Går mot 0 for store n.

Simulerer ligningen

$$x_{n+2} = \left(\frac{19}{3} + \delta\right) x_{n+1} - 2x_n$$

$|\delta| \approx 10^{-17}$

$|\varepsilon| \approx 10^{-17}$

$x_0 = 1$

$x_1 = \frac{1}{3} + \varepsilon$

Karakteristiske ligning

$$r^2 - \left(\frac{19}{3} + \delta\right) r + 2 = 0$$

$$r_1 = \frac{1}{6}\left(19 + 3\delta - \sqrt{289 + 114\delta + 9\delta^2}\right)$$

$$r_2 = \frac{1}{6}\left(19 + 3\delta + \sqrt{289 + 114\delta + 9\delta^2}\right)$$

$$r_1 \approx \frac{1}{3} - \frac{\delta}{17}$$

$$r_2 \approx 6 + \frac{18}{17}\delta$$

Generell løsning

$$x_n = C\left(\frac{1}{3} - \frac{\delta}{17}\right)^n + D\left(6 + \frac{18\delta}{17}\right)^n$$

resultatet av dette kommer til å være veldig nærme

$$x_n = C\left(\frac{1}{3}\right)^n + D\,6^n$$

<u>Observasjon</u>

Avrundingsfeil i koeffisientene leder ikke til stor avrundingsfeil i den generelle løsningen.

$$x_{n+2} = \left(\frac{19}{3} + \delta\right) x_{n+1} - 2x_n$$

$x_0 = 1$

$x_1 = \frac{1}{3} + \varepsilon$

Kan se på denne

$$\underbrace{x_{n+2} = \frac{19}{3} x_{n+1} - 2x_n}$$

Har generell løsning

$$x_n = C\left(\frac{1}{3}\right)^n + D\,6^n$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 1 = C + D \\ x_1 &= \frac{1}{3} + \varepsilon = \frac{1}{3}C + 6D \end{aligned}\right\} \quad C = 1 - \frac{3}{17}\varepsilon, \quad D = \frac{3}{17}\varepsilon$$

$$x_n = \left(1 - \frac{3}{17}\varepsilon\right) 3^{-n} + \frac{3}{17}\varepsilon\, 6^n$$

Avrundingsfeil i initialbetingelsene gir stor avrundingsfeil.

Estimere avrundingsfeilen

Så at $x_{n+2} - \frac{19}{3} x_{n+1} + 2x_n = 0$ $x_0 = 1$, $x_1 = \frac{1}{3}$

ble simulert som

$$\tilde{x}_n = \left(1 - \frac{\varepsilon}{17}\right) 3^{-n} + \frac{3}{17} \varepsilon\, 6^n$$

$n = 40$

$3^{-n} \approx 8{,}2 \cdot 10^{-20}$ og $6^n \approx 1{,}3 \cdot 10^{31}$

$$\tilde{x}_{40} = \tilde{x}_n = -1{,}6 \cdot 10^{14} \approx \varepsilon \cdot 6^n = \varepsilon \cdot 1{,}3 \cdot 10^{31}$$

$$|\varepsilon| \approx \frac{1{,}6 \cdot 10^{14}}{1{,}3 \cdot 10^{31}} \approx \frac{10^{14}}{10^{31}} = 10^{-17}$$

Vi hadde

$$x_{n+2} - \frac{2}{3} x_{n+1} - \frac{1}{3} x_n = 0 \qquad \begin{matrix} x_0 = 1 \\ x_1 = 0 \end{matrix}$$

$$x_2 = \frac{2}{3} x_1 + \frac{1}{3} x_0 = \frac{1}{3}$$

Generell løsning

$$x_n = C + D\left(-\frac{1}{3}\right)^n \qquad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = \frac{1}{3} + \varepsilon \end{matrix}$$

Simulert løsning

$$C = \frac{1}{4} + \varepsilon_1 \qquad D = \frac{3}{4} + \varepsilon_2 \qquad \begin{matrix} |\varepsilon_1| \approx 10^{-17} \\ |\varepsilon_2| \approx 10^{-17} \end{matrix}$$

Simulert løsning blir

$$\tilde{x}_n = \left(\frac{1}{4} + \varepsilon\right) + \left(\frac{3}{4} + \varepsilon_2\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

For store n vil

$$\tilde{x}_n \approx \frac{1}{4} + \varepsilon$$

Observasjon

$\sim r_1^n$

La $x_{n+2} + b x_{n+1} + c x_n = 0$ $\sim 2^n$

og la $r^2 + b r + c = 0$ være den karakteristiske ligningen til $\{x_n\}$ med røtter r_1 og r_2. Anta $|r_1| \geq |r_2|$ og la $\tilde{x}_n$ betegne den simulerte løsningen.
Hvis avrundingsfeil skjer under utregning av $\tilde{x}_n$ vil

$|\tilde{x}_n| \approx |r_1|^n$ for tilstrekkelig store n.

Eksempel

$$3x_{n+2} + 4x_{n+1} - 4x_n = 0 \qquad x_0 = 1,\quad x_1 = \frac{2}{3}$$

Simuleres som

Må bruke flyttall.

$$x_{n+2} = \frac{-4x_{n+1} + 4x_n}{3}$$

$$3r^2 + 4r - 4 = 0 \qquad r = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ -2 \end{cases}$$

Generell løsning

$$x_n = (-2)^n C + D\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= 1 = C + D \\ x_1 &= \frac{2}{3} = -2C + \frac{2}{3}D \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} C &= 0 \\ D &= 1 \end{aligned}$$

Løsning

$$x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

Simulert løsning introduserer små avrundingsfeil

$$\hat{x}_n = (0 + \varepsilon_1)(-2)^n + (1 + \varepsilon_2)\left(\frac{2}{3}\right)^n$$