Ex fra seksjon 11.2 i Kalkulus.

Beregn $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ med feil mindre enn 10^{-4}.

Den antiderivert til $\frac{\sin x}{x}$ "fins ikke",
så den vanlige integrasjonsteknikken fungerer ikke.
Strategi: Vi tilnærmer $\sin x$ med sitt Taylorpolynom av grad n og integrerer resultatet.
Spørsmål: hvor stor grad trenger vi?

Vi husker at

$$T_{2n-1}\sin x = T_{2n}\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

Velger $T_{2n}\sin x$ siden det gir best estimater for feilen.

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{T_{2n}\sin x + R_{2n}\sin x}{x}\,dx$$

$$= \int_0^1 \frac{T_{2n}\sin x}{x}\,dx + \int_0^1 \frac{R_{2n}\sin x}{x}\,dx$$ feilen

Merk at

$$\int_0^1 \frac{T_{2n}\sin x}{x}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{5!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!}\right)dx$$ $\cancel{\frac{\sin x}{x} = \sin}$

$$= \Big|_0^1 \left(x - \frac{x^3}{3\cdot 6} + \frac{x^5}{5\cdot 5!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{3\cdot 6} + \frac{1}{5\cdot 5!} + \dots + (-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)(2n-1)!}$$

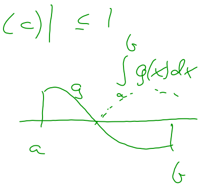
Hvor stor må n være for at feilen skal bli mindre enn 10^{-4}? $(a=0)$

Husk at $R_{2n}f(x) = \frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(c)$, $c \in (0,x)$, og c avhenger av x.
så feilen i integralet er

$$\int_0^1 \frac{R_{2n}f(x)}{x}\,dx \qquad |D^{2n+1}(\sin c)|$$

Vi vet at $|f^{(2n+1)}(c)| = |D^{2n+1}(\sin x)(c)| \le 1$

Derfor er



$$\left|\int_0^1 \frac{R_{2n}f(x)}{x}\,dx\right| \le \int_0^1 \left|\frac{R_{2n}f(x)}{x}\right|dx$$

$$= \int_0^1 \left|\frac{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}f^{(2n+1)}(c)}{x}\right|dx \le \int_0^1 \left(\frac{\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}}{x}\right)dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{(2n+1)!}x^{2n}\right)dx$$

$$= \frac{1}{(2n+1)}\frac{1}{(2n+1)!}\left[x^{2n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{(2n+1)(2n+1)!}$$

Feilen blir mindre enn 10^{-4} om

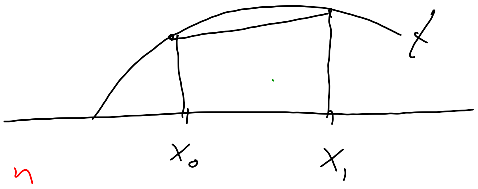
$\frac{1}{(2n+1)(2n+1)!} \le 10^{-4}$. Dette skjer første gang når $n=3$.

Interpolasjon (seksjon 9.2.1, 9.2.2 i komp).

Taylorpolynomet av grad n gjenskaper

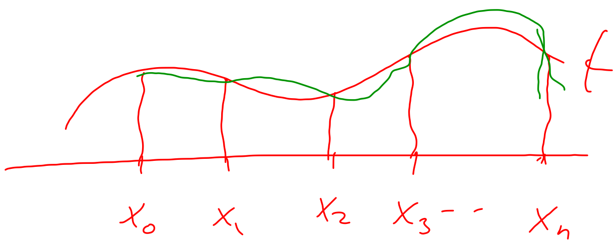
$f(a), f'(a), f''(a), \ldots, f^{(n)}(a)$.

Hva med å gjenskape ulike funksjonsverdier i steden?



Interpolasjonsproblemet

Finn polynomet av grad n som har samme funksjonsverdi som f i $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$.

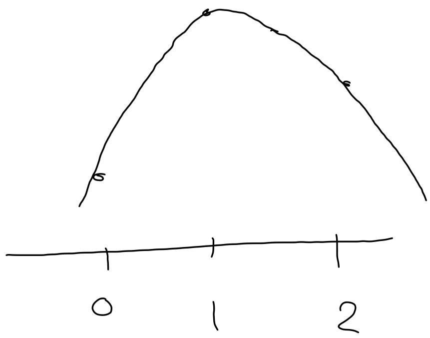


$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

$$P_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Eksempel. Finn et polynom som interpolerer punktene $(0,1), (1,3), (2,2)$

$f(0)=1,\ f(1)=3,\ f(2)=2$



Skal finne polynom som matcher dette.

Siden vi har tre punkter er det naturlig å prøve med polynom av grad 2.

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$$

$1 = f(0) = P(0) = c_0, \quad c_0 = 1,$

$3 = f(1) = P(1) = c_0 + c_1 + c_2 = 1 + c_1 + c_2, \quad c_1 + c_2 = 2$

$2 = f(2) = P(2) = c_0 + 2c_1 + 4c_2 = 1 + 2c_1 + 4c_2, \quad 2c_1 + 4c_2 = 1$

Vi får $c_1 = 7/2, \quad c_2 = -3/2$

Så $P(x) = 1 + \frac{7}{2}x - \frac{3}{2}x^2$

Eksempel en gang til. $(0,1), (1,3), (2,2)$

$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x(x-1)$ - Newton formen til interpolasjonspolynomet. Da kan vi systematisk finne en koeffisient av gangen.

$1 = f(0) = P(0) = c_0 \quad , \quad c_0 = 1$

$3 = f(1) = P(1) = c_0 + c_1 \cdot 1 + 0 \quad , \quad c_1 = 3 - c_0 = 2$

$2 = f(2) = P(2) = c_0 + 2c_1 + 2c_2 \quad , \quad 2c_2 = 2 - c_0 - 2c_1$

$= 2 - 1 - 2 \cdot 2 = -3$

$c_2 = -3/2$

$P(x) = 1 + 2x - \frac{3}{2} x(x-1)$

Newtonform for grad n.

Hvis vi har punktene $x_0, x_1, x_2, \ldots x_n$
så er Newtonformen gitt ved

$$P(x) = c_0 + c_1(x-x_0) + c_2(x-x_0)(x-x_1) + c_3(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) + \ldots$$
$$\ldots + c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$