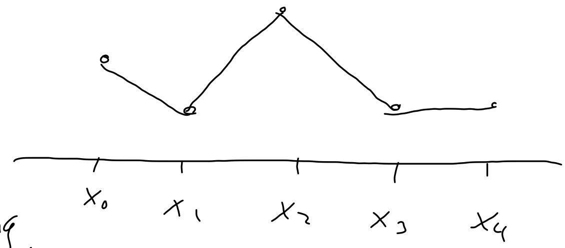
Numerisk derivasjon.

Anta at vi har måleverdier $(x_i, y_i)_{i=0}^{n}$
for eks. temperatur ved ulike tidspunkt.
Kan vi derivere noe slikt?

Vi trekker ett linje mellom nabopunkter og bruker stigningstallet til denne som en tilnærming til den deriverte på intervallet.



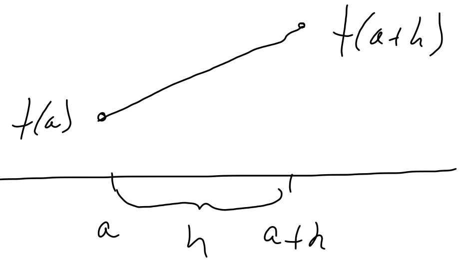
På $[x_i, x_{i+1}]$ gir det $\approx \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$

For å sjekke hvor godt dette fungerer tenker vi oss at dataene er hentet fra en funksjon $f(x)$, $y_i = f(x_i)$.

Da vet vi at den deriverte av temperaturen i a er $f'(a)$. Tilnærminger er da

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

der h er tiden fram til neste måling.



Eks:
$f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$

$a = 0.5$, $f'(a) \approx 0{,}87758\ldots$

Vi observerer at feilen går mot null når h blir mindre. Når h reduseres med $1/10$ reduseres feilen med $1/10$, se eksempel 11.3 i komp.

Feilanalyse

Vi bruker tilnærmingen $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ til $f'(a)$.

Hva kan vi si om feilen?

$$\left| f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right| .$$

Husk at

$$\underset{x}{f(a+h)} = f(a) + \underset{x-a=h}{h} f'(a) + \underset{(x-a)^2}{\frac{h^2}{2}} f''(\underset{c_h \in (a,a+h)}{c_h})$$

Altså er

$$f(a+h) - f(a) = h f'(a) + \frac{h^2}{2} f''(c_h)$$

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) + \frac{h}{2} f''(c_h)$$

$$f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\frac{h}{2} f''(c_h)$$

Feilen blir større når h blir veldig liten!

Fortsettelse på onsdag.