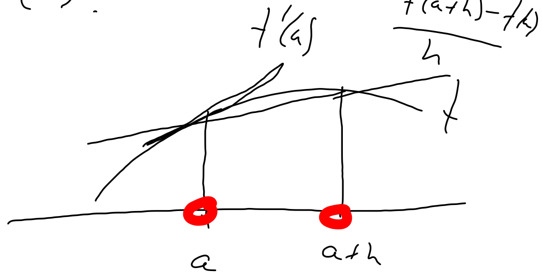
Numerisk derivasjon.

Dette gir mulighet for å derivere måledata. For å teste metoden er det greit å tenke seg data hentet fra en funksjon $f(x)$. I et punkt a er den deriverte gitt ved

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Vi kan velge $h > 0$ og bruke $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ som en tilnærming til $f'(a)$.



Eks. $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$

$a = 0.5$, $h = 10^{-i}$, $i = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Feilanalyse.

Hvordan er feilen når vi tilnærmer $f'(a)$ med $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$?

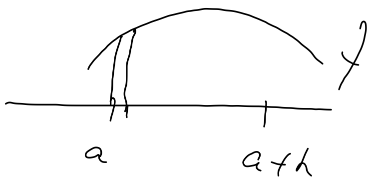
$h = x-a$

Taylor $f(\overset{x}{a+h}) = f(a) + \overset{x-a}{h}\, f'(a) + \dfrac{h^2}{2} f''(c_h),$

$$f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -\frac{h}{2} f''(c_h) \qquad c_h \in (a, a+h)$$

$$\approx -\frac{h}{2} f''(a) \quad \text{når } h \text{ er liten og } f \text{ er snill}$$

siden f varierer lite på $(a, a+h)$ når h er liten.



Litt teknisk massasje

$$\left| f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \right| = \left| -\frac{h}{2} f''(c_h) \right|$$

$$= \frac{h}{2} \left| f''(c_h) \right|, \qquad c_h \in (a, a+h)$$

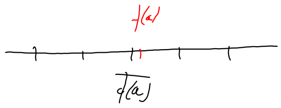
$$\leq \frac{h}{2} \max_{x \in [a, a+h]} |f''(x)|, \quad M$$

Tar max over det lukkede intervallet og antar at f'' er kontin. på $[a, a+h]$ – da fins max-verdien.

Hva med avrundingsfeilen?

Vår tilnærming til $f'(a)$ er $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Som regel vil ikke $f(a)$ være et flyttall. Det betyr at maskinen erstatter $f(a)$ med det nærmeste flyttallet,



$\overline{f(a)}$ så er den relative feilen,

$$\frac{\overline{f(a)}-f(a)}{f(a)} = \varepsilon_1 \qquad \text{der} \quad \varepsilon_1 \approx 10^{-16}$$

Omskrevet får vi: $\overline{f(a)} = f(a)(1+\varepsilon_1)$

Det samme gjelder også for $\overline{f(a+h)}$,

så $\overline{f(a+h)} = f(a+h)(1+\varepsilon_2)$ der $\varepsilon_2 \approx 10^{-16}$

Det vi regner på datamaskinen er

$$\frac{\overline{f(a+h)}-\overline{f(a)}}{h}.$$

Hva blir nå feilen?

$$\left|f'(a) - \frac{\overline{f(a+h)}-\overline{f(a)}}{h}\right| = \left|f'(a) - \frac{f(a+h)(1+\varepsilon_2) - f(a)(1+\varepsilon_1)}{h}\right|$$

$$= \left|f'(a) - \frac{f(a+h)-f(a)}{h} - \frac{f(a+h)\varepsilon_2 - f(a)\varepsilon_1}{h}\right|$$

$$= \left|-\frac{h}{2}f''(c_h) - \frac{f(a+h)\varepsilon_2 - f(a)\varepsilon_1}{h}\right| \qquad |a+b| \le |a|+|b|$$

$$\le \left|-\frac{h}{2}f''(c_h)\right| + \left|\frac{f(a+h)\varepsilon_2 - f(a)\varepsilon_1}{h}\right|$$

$$= \frac{h}{2}\underbrace{\max_{x\in[a,a+h]}|f''(x)|}_{M_1} + \frac{1}{h}\left|f(a+h)\varepsilon_2 - f(a)\varepsilon_1\right|$$

$$\le |f(a+h)\varepsilon_2| + |f(a)\varepsilon_1|$$

$$\le |\varepsilon_2| \max_{x\in[a,a+h]}|f(x)| + |\varepsilon_1| \underbrace{\max_{x\in[a,a+h]}|f(x)|}_{M_2}$$

$$= |\varepsilon_2| M_2 + |\varepsilon_1| M_2$$

$$= M_2(|\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|) \le M_2 2\varepsilon^*$$

der ε^* er den verste avr. feilen

$|\varepsilon_1| \le \varepsilon^*$, $|\varepsilon_2| \le \varepsilon^*$

$\varepsilon^* \approx 10^{-16}$

$$\left|f'(a) - \frac{\overline{f(a+h)}-\overline{f(a)}}{h}\right| \le \frac{h}{2}\cdot M_1 + \frac{M_2\, 2\varepsilon^*}{h}$$