Numerisk derivasjon.

Enkleste metode:

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad h > 0$$

$$\left| f'(a) - \frac{\overline{f(a+h)} - \overline{f(a)}}{h} \right| \leq \frac{h}{2} M_1 + \frac{2\varepsilon^*}{h} M_2$$

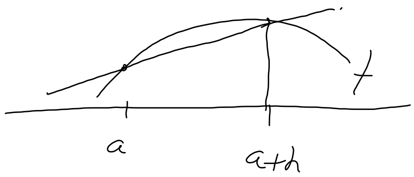
der $M_1 = \max_{x \in [a, a+h]} |f''(x)|$, $M_2 = \max_{x \in [a, a+h]} |f(x)|$

$\varepsilon^* \approx 10^{-16}$

Andre metoder for numerisk derivasjon.

Strategi for å finne den "enkle" metoden.

Tar sekanten mellom a, og $a+h$ og bruker dens stigningstall som tilnærming til $f'(a)$.



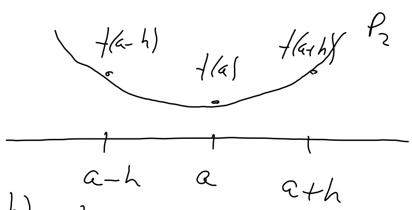
Hva med å interpolere i flere punkter?

i) Interpolasjon i $a-h, a, a+h$. Får kvadr. pol.

$$P_2(x) = c_0 + c_1(x-(a-h)) + c_2(x-(a-h))(x-a)$$

$$c_0 = f(a-h), \quad c_1 = \frac{f(a)-f(a-h)}{h}$$

$$c_2 = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$



Vi bruker $f'(a) \approx P_2'(a) = \dfrac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}$

$$\text{Feil} \leq \frac{h^2}{2} M_1 + \frac{\varepsilon^*}{h} M_2$$

Kan også få tilnærming til $f''(a)$:

$$f''(a) \approx P_2''(a) = \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

En tredje tilnærming til $f'(a)$ er

$$f'(a) \approx \frac{f(a-2h) - 8f(a-h) + 8f(a+h) - f(a+2h)}{12h}$$

Finn interpolasjonspolynomet av grad 4, P_4 og bruk $f'(a) \approx P_4'(a)$

Numerisk integrasjon.

Definisjon av $\int_a^b f(x)\,dx$ - integralet til f.

Vi deler opp $[a,b]$ i n biter

$x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_{n-1} \quad x_n$

$a \qquad\qquad\qquad\qquad b$

La $m_i = \min_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $M_i = \max_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$

Da kan vi lage to tilnærminger til arealet under grafen:

$$\underline{I}_n = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i - x_{i-1}), \quad \overline{I}_n = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_i - x_{i-1})$$

Nå kan vi la avstanden mellom punktene gå mot null og se hva som skjer.

Grensen for $\underline{I} = \sup \underline{I}_n$, $\overline{I} = \inf \overline{I}_n$

Hvis $\underline{I} = \overline{I}$ sier vi at f er integrerbar

og $\int_a^b f(x)\,dx = \underline{I} = \overline{I}$

Kult teorem

Anta at f er integrerbar og la t_i være et vilkårlig tall i $[x_{i-1}, x_i]$. Da vil

$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$ konvergere mot $\int_a^b f(x)\,dx$.

Ha ha, da kan vi jo bruke midtpunktet

$t_i = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$. - midtpunktmetoden.

Sett $x_i - x_{i-1} = h$, $i = 1, \ldots, n$. Da er tilnærmingen

$I_{mid}(h) = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1/2})$, $x_{i-1/2} = \frac{x_{i-1}+x_i}{2}$

For å regne ut $\int_a^b f(x)\,dx$:

Velg en h_0 og regn ut

$I_{mid}(h_0)$, $I_{mid}(h_0/2)$, $I_{mid}(h_0/2^2)$, ..., $I_{mid}(h_0/2^m)$..

inntil to nabo-tilnærminger er tilstrekkelig like (for eksempel forskjell på 10^{-12}).