Differensialligninger

Hvorfor differensialligninger?

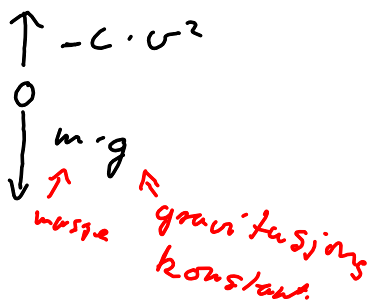
La $x(t)$ betegne strekning ved tiden t.

$v(t) = x'(t)$ betegne farten

$a(t) = v'(t) = x''(t)$ betegne akselerasjon

Slipper en ball

Hvordan utvikler farten til ballen seg?



$$F = mg - cv^2$$

Newtons 2. lov.

$$F = m \cdot a$$

$$mg - cv^2 = m \cdot a = mv'$$

$$mv' = mg - cv^2$$

Trenger en startbetingelse for spikre løsningen

$$v(0) = 0.$$

En førsteordens differensialligning er en ligning på formen

$$x' = x'(t) = f(t, x)$$

hvor $x(t)$ er en ukjent funksjon.

Eksempel

i) $x' = 3$ $\quad f(t, x) = 3$

ii) $mv' = mg - cv^2$

$v' = g - \frac{c}{m} v^2$ $\quad$ sett $v = x$

$x' = g - \frac{c}{m} x^2$ $\quad f(t, x) = g - \frac{c}{m} x^2$

iii) $x' = 2t$ $\quad f(t, x) = 2t$

iv) $x' = x$ $\quad f(t, x) = x$

v) $x' = t^3 + \sqrt{x}$ $\quad f(t, x) = t^3 + \sqrt{x}$

Løsning

$x' = 3$ $\quad x(t) = 3t + C$ $\quad C$ konstant.

$x' = x$ $\quad x(t) = Ce^t$

Geometrisk tolkning av differensiallikninger

Hva forteller

$$x'(t) = f(t, x) \quad \text{oss?}$$

$x'(t)$ angir stigningstallet til tangenten til $x = x(t)$ i punktet t.

Eks

$(t=1, x=2)$

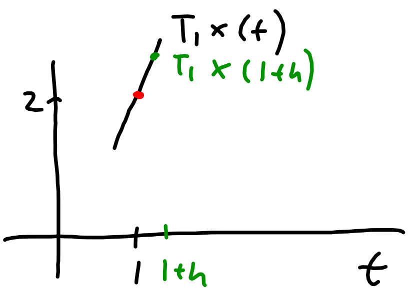
$$x' = f(t,x) = t + x \qquad x(1) = 2$$

Finn tangenten til $x(t)$ i $t=1$

$$x'(t) = f(t, x(t)) = f(1,2) = 1+2 = 3$$

Formel for tangenten

$$T_1 x(t) = x(1) + (t-1)\, x'(1)$$
$$= 2 + (t-1)\,3 = 3t - 1$$



Eulers metode

Vi har $x'(t) = f(t,x)$ og $x(t_0) = x_0$

Ide: Følger tangenten fra t_0 til $t_0 + h$

$$\begin{aligned} T_1 x(t) &= x(t_0) + (t-t_0)x'(t_0) \\ &= x(t_0) + (t-t_0) f(t_0, \underbrace{x(t_0)}_{=x_0}) \\ &= x_0 + (t-t_0) f(t_0, x_0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_1 x(t_0+h) &\approx x_0 + (t_0+h-t_0) f(t_0, x_0) \\ &= x_0 + h f(t_0, x_0) \\ &= x_1 \end{aligned}$$

Hvis h er liten vil x_1 være en god tilnærming til $x(t_0+h)$

Sett $t_1 = t_0 + h$

Kan regne tangenten i punktet (t_1, x_1)

$$T_1 x(t) = x_1 + (t-t_1) f(t_1, x_1)$$

$$T_1 (t_1+h) = x_1 + h f(t_1, x_1) = x_2$$

$$x_2 \approx x(t_2) = x(t_0+2h) = x(t_1+h)$$

Generelt

$$x_{k+1} = x_k + h\,f(t_k, x_k)$$
$$t_{k+1} = t_k + h$$

Eksempel

Løser numerisk $x' = t + x$ på intervallet $\underset{[0,3]}{[a, b]}$ med N steg med Eulers metode. $x(0) = 0$

$x' = t + x$ $\qquad f(t, x) = t + x$

$x(0) = 0$

$t_0 = a = 0$ $\qquad h = \frac{b-a}{N}$

$t_N = b = 3$

Analytisk løsning

$x(t) = -1 - t + e^t$ $\qquad x(0) = -1 - 0 + e^0 = 0$

$$x'(t) = -1 + e^t = t \overbrace{- 1 - t + e^t}^{x} = t + x$$

$$x(t_n+h) \approx x(t_n) + h\,x'(t_n)$$

(Eulersmetode tilnærming)

$$x'(t_n) \approx \frac{x(t_n+h) - x(t_n)}{h}$$

Symetrisk Newton kvotienten

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

$$x'\left(t+\frac{h}{2}\right) \approx \frac{x\left(t+\frac{h}{2}+\frac{h}{2}\right) - x\left(t+\frac{h}{2}-\frac{h}{2}\right)}{2\,\frac{h}{2}}$$

$$\approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

Stokker litt om på formelen

$$x(t_k+h) \approx x(t_k) + h\,x'\left(t_k+\frac{h}{2}\right)$$

$$= \underbrace{x(t_k)}_{\approx x_k} + h\,f\left(t_k+\frac{h}{2},\, x\left(t_k+\frac{h}{2}\right)\right)$$

Eulers midtpunktsmetode

Ide: gå fra (t_k, x_k) til (t_{k+1}, x_{k+1}) i to steg.

1. Regn ut en tilnærming til $x(t+\frac{h}{2})$ med Eulers metode

$$x_{k+1/2} = x_k + \frac{h}{2} f(t_k, x_k)$$

2. Regn ut den nye løsningen (t_{k+1}, x_{k+1}) ved å følge linja fra (t_k, x_k) med stigningstall $f(t_k + \frac{h}{2}, x_{k+\frac{1}{2}})$

$$x_{k+1} = x_k + h f(t_k + \frac{h}{2}, x_{k+\frac{1}{2}})$$