Differensialligninger

Førsteordens lineære ligninger er på formen

$$y' + f(x)y = g(x)$$

$y(x)$ – ukjent funksjon.

Eks

$$y' + 2xy = x$$

Da er $f(x) = 2x$ og $F(x) = \int f(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2$

Multiplisere med $e^{F(x)} = e^{x^2}$ (Integrerende faktor)

$$e^{x^2}y' + 2xe^{x^2}y = xe^{x^2}$$

$$(e^{x^2}y)' = xe^{x^2}$$

Produktregel

$$(e^{x^2}y(x))' = (e^{x^2})'y(x) + e^{x^2}y'(x) = 2xe^{x^2}y + e^{x^2}y'$$

$$e^{x^2}y = \int (e^{x^2}y)'dx = \int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

$$e^{x^2}y = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

$$y = \frac{1}{2} + ce^{-x^2}$$

Oppg. 10.1.3 e)

$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(\sin x)' = \cos x$$

$$y' + \sin x\, y = \sin x$$

Finner

$$\int \sin x\, dx = -\cos x$$

$$(e^{-\cos x})' = \sin x\, e^{-\cos x}$$

Integrerende faktor $e^{-\cos x}$

$$e^{-\cos x} y' + \sin x\, e^{-\cos x} y = \sin x\, e^{-\cos x}$$

$$\int (e^{-\cos x} y)' dx = \int \sin x\, e^{-\cos x} dx$$

$$e^{-\cos x} y = \int \sin x\, e^{-\cos x} dx = \int e^u du = e^u$$

$$u = -\cos x \qquad du = \sin x\, dx$$

$$= e^{-\cos x} + C$$

$$e^{-\cos x} y = e^{-\cos x} + C$$

$$y = 1 + C e^{\cos x}$$

Anvendelser

Eksempel 10.2.1

En dyrepopulasjon består i dag av P dyr.

Populasjonen øker med en vekstrate r

$Y(t)$ – populasjonens størrelse ved tiden t

Ved $t=0$ er $Y(0) = P$

Vekstrate r betyr at på et lite tidsintervall Δt så øker populasjonen

$$Y(t+\Delta t) - Y(t) \approx rY(t)\cdot\Delta t$$

Deler på tiden Δt

$$\frac{Y(t+\Delta t) - Y(t)}{\Delta t} \approx rY(t)$$

når $\Delta t \to 0$ så får vi

$$Y'(t) = rY(t)$$

$$Y' = rY$$

$$Y(t) = Ce^{rt}$$

$$Y(0) = P = Ce^{0} = C \qquad C = P$$

$$Y(t) = Pe^{rt}$$

Eks 10.4.5

Vann renner ut av en tank.
(Torricellis lov)
Hastigheten til vannet er proporsjonal med kvadratroten av høyden til vannet.

$v(t)$ - hastigheten til vannet
$h(t)$ - høyden til vannet.

$$v(t) = k\sqrt{h(t)}$$

Proporsjonalitetskonstant

Anta at tanken er sylinderformet med radius r
Det tar 10 minutter før $3/4$ av vannet har rent ut
Hvor lang tid tar det før tanken er tom?
Hva er $Y(t)$?

$Y(t)$ - vann volumet.

$$Y(t) = r^2\pi\, h(t) \iff h(t) = \frac{Y(t)}{r^2\pi} \quad (*)$$

La nå hullet ha areal A.
På et lite tidsrom Δt renner det da ut

$$A\cdot v(t)\cdot\Delta t = Y(t) - Y(t+\Delta t)$$

$$A\cdot v(t) = -\frac{(Y(t+\Delta t) - Y(t))}{\Delta t}$$

La $\Delta t \to 0$ Da har vi

$$A\cdot v(t) = -Y'(t) \quad *$$

$$v(t) = k\cdot\sqrt{h(t)} \overset{(*)}{=} k\cdot\sqrt{\frac{Y(t)}{r^2\pi}} = \frac{k}{r\sqrt{\pi}}\cdot\sqrt{Y(t)}$$

$(*)$

$$\underbrace{\frac{Ak}{r\sqrt{\pi}}}_{K}\sqrt{Y(t)} = -Y'(t)$$

$$K\sqrt{Y(t)} = -Y'(t)$$

Separabel ligning

$$\frac{Y'}{\sqrt{Y}} = -K \qquad dY = y'dt$$

$$\int \frac{Y'}{\sqrt{Y}}dt = \int K\,dt$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{Y}}dy = -Kt + c$$

$$2\sqrt{Y} = -Kt + c$$

$$Y = \left(-\frac{K}{2}t + c\right)^2$$

$Y(0) = V$
$Y(10) = \frac{1}{4}V.$

$$Y(t) = \left(-\frac{\sqrt{V}}{20}t + \sqrt{V}\right)^2$$

$$= V\left(-\frac{1}{20}t + 1\right)^2$$

Så ved $t=20$ er tanken tom.